H. Thonier
3 juin 2012

Semelle rectangulaire sous poteau en béton ou métallique

Dimensionnement

On peut déterminer les dimensions de la semelle, pour une contrainte limite du sol q_u :

- soit pour avoir le même débord : $\frac{A-a}{2} = \frac{B-b}{2}$ d'où A et B racines du système $A.B = \frac{N_{Ed}}{q_u}$ et A – a = B – b (avantage : deux hauteurs utiles très voisines)
- soit pour avoir une semelle homothétique du poteau : $A = \sqrt{\frac{N_{Ed}.a}{q_u.b}}$ et $B = \sqrt{\frac{N_{Ed}.b}{q_u.a}}$ (inconvénient les hauteurs utiles peuvent être très différentes)

Retenons de préférence la 1re méthode avec des hauteurs utiles : $d_x \geq \frac{A-a}{4}$ et $d_y \geq \frac{B-b}{4}$

Application numérique.

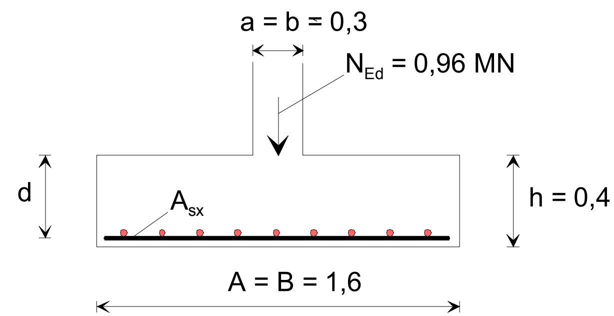
Poteau 0,30 × 0,30 m sur semelle carrée 1,60 × 1,60 m. Sol : q_u = 0,4 MPa
Le poids propre de la semelle est compensé par le poids des terres voisin q_0

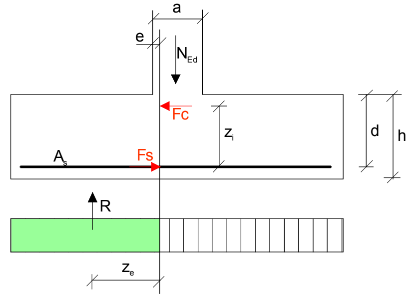
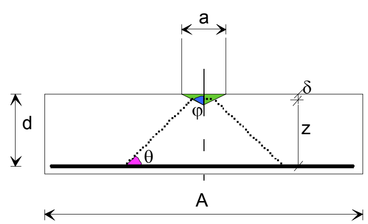
→ contrainte du sol : $\sigma_{gr} = \frac{N}{A} = \frac{0{,}96}{1{,}6^2} = 0{,}375$ MPa

Le poids de la semelle n'intervient pas dans le calcul des armatures.

Dimensions de la semelle : $A = B = \sqrt{\frac{N_{Ed}}{q_u}} = \sqrt{\frac{0{,}96}{0{,}4}} = 1{,}55$ m arrondi à 1,60 m

Hauteur utile : $d_y \geq \frac{B-b}{4} = \frac{1{,}6-0{,}3}{4} = 0{,}325$ m → h = 0,325 + 0,03 + 1,5Ø = 0,379 m
pour le lit supérieur supposé en diamètre maximal HA16, arrondie à h = 0,40 m.
On en tire d_x = h – 0,03 – 0,016/2 = 0,362 m
et d_y = h – 0,03 –1,5×0,016 = 0,346 m
Béton f_{ck} = 25 MPa et acier B500A (ε_{uk} = 25 ‰ et k = 1,05)



Méthodes		Exposé des calculs	Application numérique
1 – Art. 9.8.2.2 de l'EC2 Par rapport au plan situé à e = 0,15a à l'intérieur du mur Eq. 9.13 de l'EC2 Dans l'autre direction, on trouve A_s = 9,01 cm^2 obtenus avec 8HA12, s = 180 mm Pour info, variante acier à palier : A_s = 9,86 cm^2 Pour info, si z = 0,9d et acier à palier : A_s = 10,70 cm^2 (+13 %)		$R = p.(0{,}5A - 0{,}35a)$ $z_e = (0{,}5A - 0{,}35a)/2$ Moment $M_{Ed} = R.z_e = pB.\frac{(A-0{,}7a)^2}{8}$ $\mu = \frac{M_{Ed}}{B.d^2.f_{cd}}$ Pour $f_{ck} \leq 50$ MPa $\xi = 1{,}25\left(1-\sqrt{1-2\mu}\right)$ $\varepsilon_s = 3{,}5\times\frac{1-\xi}{\xi} \leq 0{,}9\,\varepsilon_{uk}$ $\sigma_s = f_{yd}.\left(1+(k-1).\frac{\varepsilon_s-\varepsilon_{s0}}{\varepsilon_{uk}-\varepsilon_{s0}}\right)$ $z = d.(1-0{,}4\xi)$ $A_s = \frac{M_{Ed}}{z.\sigma_s}$	$p = \sigma_{gr} = 0{,}375$ MPa Pour la hauteur utile minimale d_y = 0,346 m $M_{Ed} = 0{,}375\times1{,}6\times\frac{(1{,}6-0{,}7\times0{,}3)^2}{8} = 0{,}1449$ MNm $\mu = \frac{0{,}1449}{1{,}6\times0{,}346^2\times16{,}7} = 0{,}0453 < 0{,}372$ ξ = 0,05797 ε_s = 56,9 ‰ limité à 22,5 ‰ $\sigma_s = \frac{500}{1{,}15}\times\left(1+(1{,}05-1)\times\frac{22{,}5-2{,}174}{25-2{,}174}\right)$ σ_s = 454,1 MPa z = 0,338 m $A_{sy} = \frac{0{,}1449\times10^4}{454{,}1\times0{,}338} = 9{,}44$ cm^2 Dans l'autre direction, on trouve A_{sx} = 9,01 cm^2 soit // côté A : 8HA12, s = 200 mm et // côté B : 9HA12, s = 180 mm
2 – Méthode des bielles hydrostatiques	Il n'est possible d'avoir les bielles perpendiculaires aux facettes du nœud que pour une semelle carrée sous poteau carré.	Voir Annexe A	Sans intérêt économique.
3 – Méthode des bielles non hydrostatiques La hauteur 2δ du noeud supérieur est minimale. Ne pouvant pas connaître l'allongement de l'armature, on ne peut que prendre $\sigma_s = f_{yd}$ Voir Annexe A	 $\sigma_1 = \frac{N_{Ed}}{a.b} = \frac{0{,}96}{0{,}3\times0{,}3} = 10{,}67$ Mpa $k = \frac{\sigma_1}{f_{ck}} = \frac{10{,}67}{25} = 0{,}4267 > 0{,}05$ $k' = 1+5k$ si $k \leq 0{,}05$ ou $k' = 1{,}125+2{,}5k$ si k > 0,05 $k' = 1{,}125+2{,}5\times0{,}4267 = 2{,}192$ $f_{cd,c} = \frac{k'.f_{ck}}{\gamma_C} = \frac{2{,}192\times25}{1{,}5} = 36{,}53$ $\ldots 1(1 - \frac{25}{\ldots}) \times \frac{25}{\ldots} = 15$	$\frac{N.(A-a)}{16\,b.f_{cd,c}} = \delta.(d_x-\delta) \rightarrow \delta$ $\frac{N.(B-b)}{16\,a.f_{cd,c}} = \delta.(d_y-\delta) \rightarrow \delta$ Par $\delta = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{N.(A-a)}{16\,b.f_{cd,c}}}$ $\cot\theta_x = \frac{A-a}{4(d_x-\delta)} \rightarrow \theta_x$ $\cot\varphi = \frac{4\delta}{a} \rightarrow \varphi$ $\omega = \varphi - \theta$ $\sigma = \frac{N.\cos\omega.\sin\varphi}{2\sin\theta.a.b}$ $\tau = \sigma.\tan\omega$ $A_s = \frac{N.\cot\theta}{2\,f_{yd}}$ Dans l'autre direction, on trouve : θ = 44,91° ; φ = 73,67° ; ω = 28,76° ; σ = 6,36 MPa	$\delta = \frac{0{,}362}{2} - \sqrt{\frac{0{,}362^2}{4} - \frac{0{,}96\times(1{,}6-0{,}3)}{16\times0{,}3\times36{,}53}} = 0{,}02086$ $\delta = \frac{0{,}346}{2} - \sqrt{\frac{0{,}346^2}{4} - \frac{0{,}96\times(1{,}6-0{,}3)}{16\times0{,}3\times36{,}53}} = 0{,}02197$ → δ = 0,02197 m $\cot\theta_x = \frac{1{,}6-0{,}3}{4\times(0{,}362-0{,}02197)} = 0{,}9558$ $\rightarrow \theta_x = 46{,}29°$ $\cot\varphi = \frac{4\times0{,}02197}{0{,}3} = 0{,}2929 \rightarrow \varphi = 73{,}67°$ ω = 73,67 – 46,29 = 27,38° $\sigma = \frac{0{,}96\times0{,}8880\times0{,}9597}{2\times0{,}7228\times0{,}3\times0{,}3} = 6{,}29$ MPa $\tau = 6{,}29\times0{,}5179 = 3{,}26$ $\sigma_{max} = \frac{6{,}29}{2} + \sqrt{\frac{6{,}29^2}{4} + 3{,}26^2} = 7{,}67 < \sigma_{Rd,max} = 15$ **OK** $A_{sx} = \frac{0{,}96\times0{,}9558\times10^4}{2\times435} = 10{,}55$ cm^2

Semelle filante	Possibilité d'utiliser un diagramme acier à droite inclinée	Mettre le % mini d'armatures longitudinales	Vérification du poinçonnement	Vérification du cisaillement	Possibilité de ne pas mettre de crochets
1 – **Art. 9.8.2.2 de l'EC2**	Oui	Non	Oui	Non	Oui
2 – Méthode des bielles hydrostatiques	Non	Non	Non si $d \geq \frac{A-a}{4}$	Non	Non
3 – Méthode des bielles non hydrostatiques	Non	Non	Non si $d \geq \frac{A-a}{4}$	Non	Non
4 – Méthode des moments	Oui	Oui	Oui	Non	Oui
5 – Méthode des Recommandations Professionnelles	Non	Non	Non si $d \geq \frac{A-a}{4}$	Non	Oui Voir RP

Annexe A - Noeuds non hydrostatiques

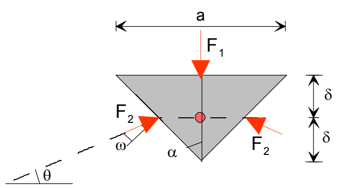


Fig. A1 – Facette du noeud

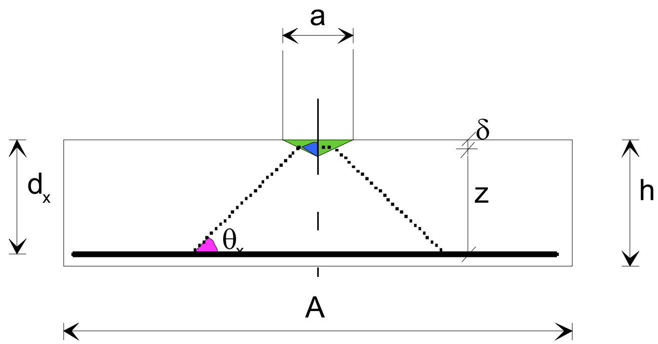


Fig. A2 – Semelle rectangulaire

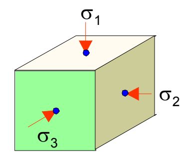


Fig. A3 - Confinement

Pour chacune des deux directions parallèles à Ox et à Oy, on considère un nœud supérieur prismatique de hauteur 2δ (Fig. A1) avec a : $\sigma_1 = \dfrac{F_1}{a.b}$.

Le nœud supérieur est soumis à des compressions dans trois directions : verticale et latéralement. Il est confiné au sens de l'article 3.1.9 de l'EC2. (Fig. A3)

La bielle horizontale incluse dans le nœud peut supporter une contrainte $f_{cd,c} = \dfrac{f_{ck,c}}{\gamma_C} = \dfrac{k'.f_{ck}}{\gamma_C}$ avec $k = \dfrac{\sigma_1}{f_{ck}}$, $k' = 1 + 5k$ si k < 0,05 ou $k' = 1{,}125 + 2{,}5k$ si k > 0,05

1er cas – Nœud hydrostatique : les 4 bielles doivent être perpendiculaires aux facettes du nœud. Or, ceci n'est possible que si A = B et a = b. De toute façon, cette méthode n'est pas intéressante économiquement.

2^{e} cas – Nœud non hydrostatique : On recherche alors la hauteur 2δ minimale du nœud telle que la contrainte de compression de la bielle horizontale supérieure soit inférieure à la contrainte limite $f_{cd,c}$

Remarque. Comme le nœud est soumis à une compression tri-axiale, on peut majorer la contrainte limite sur les facettes du nœud de 10 % (EC2-Art. 6.5.4 (5)), cette dernière devient : $\sigma_{Rd,max} = 1{,}1 k_1.\nu'.f_{cd} = 1{,}1\left(1 - \dfrac{f_{ck}}{250}\right)\dfrac{f_{ck}}{\gamma_C}$ (16,5 MPa pour f_{ck} = 25 MPa).

	Direction // Ox	Direction // Oy
Inclinaison des bielles (Fig. A2)	$\cot\theta_x = \dfrac{A/4 - a/4}{d_x - \delta}$	$\cot\theta_y = \dfrac{B/4 - b/4}{d_y - \delta}$
Effort de traction du tirant : $T = \dfrac{N}{2}.\cot\theta$	$T_x = \dfrac{N}{2}.\cot\theta_x$	$T_y = \dfrac{N}{2}.\cot\theta_y$
L'effort de compression de la bielle horizontale intérieure au nœud supérieur : C = T	$C_x = b.(2\delta).f_{cd,c} = T_x = \dfrac{N}{8}.\dfrac{A - a}{d_x - \delta}$	$C_y = a.(2\delta).f_{cd,c} = T_y = \dfrac{N}{8}.\dfrac{B - b}{d_y - \delta}$

On peut ainsi trouver la valeur minimale de δ nécessaire dans chaque direction. La valeur à retenir est la plus grande des deux.

Exemple numérique. Semelle rectangulaire 1,5 x 1,7 m sous poteau béton 0,2 x 0,4 m (même débord).
Hauteurs utiles : d_x = 0,362 m et d_y = 0,346 m, N = N_{Ed} = 0,96 MN, f_{ck} = 25 MPa.

Sous réserve que σ_2 et σ_3 soient supérieurs à $\sigma_1 = \dfrac{N}{a.b} = \dfrac{0{,}96}{0{,}2 \times 0{,}4} = 12{,}0$ MPa, on a un rapport $k = \dfrac{\sigma_1}{f_{ck}} = \dfrac{12}{25} = 0{,}48 > 0{,}05$ d'où

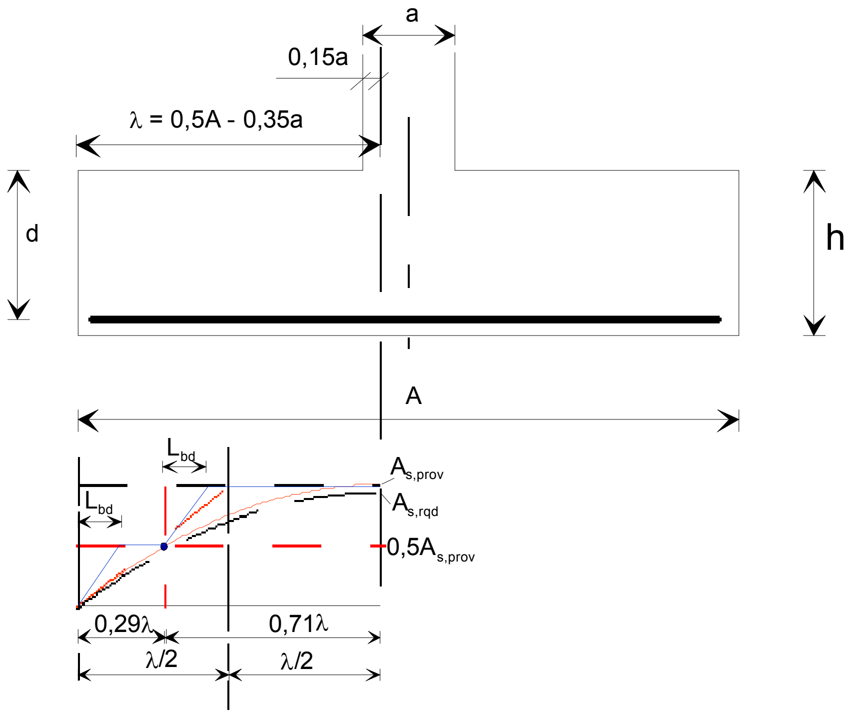
$$k' = 1{,}125 + 2{,}5k = 1{,}125 + 2{,}5 \times 0{,}48 = 2{,}325 \text{ et } f_{cd,c} = \frac{k'.f^{ck}}{\gamma_C} = \frac{2{,}325 \times 25}{1{,}5} = 38{,}75 \text{ MPa}$$

$$\frac{N.(A-a)}{16\,b.f_{cd,c}} = \delta.(d_x - \delta) \rightarrow \frac{0{,}96 \times (1{,}5-0{,}2)}{16 \times 0{,}4 \times 38{,}75} = 0{,}00503 = \delta.(0{,}362-\delta) \text{ et } \frac{N.(B-b)}{16\,a.f_{cd,c}} = \delta.(d_y - \delta) \rightarrow \frac{0{,}96 \times (1{,}7-0{,}4)}{16 \times 0{,}2 \times 38{,}75} = 0{,}01006 = \delta.(0{,}346-\delta)$$

On voit facilement que la plus grande valeur de δ sera donnée par la 2e équation : $\delta.(0{,}346 - \delta) = 0{,}01006 \rightarrow \delta = 0{,}032$ m

	Direction // Ox	Direction // Oy
Inclinaison des bielles	$\cot\theta_x = \dfrac{A/4 - a/4}{d_x - \delta} = \dfrac{(1{,}5-0{,}2)/4}{0{,}362-0{,}032} 0{,}9848$ $\rightarrow \theta_x = 45{,}44°$	$\cot\theta_y = \dfrac{B/4 - b/4}{d_y - \delta} = \dfrac{(1{,}7-0{,}4)/4}{0{,}346-0{,}032\delta} = 1{,}0350$ $\rightarrow \theta_y = 44{,}01°$
Inclinaison facette du nœud supérieur	$\cot\varphi = \dfrac{4\delta}{a} = \dfrac{4 \times 0{,}032}{0{,}2} = 0{,}64 \rightarrow \varphi = 57{,}38°$	$\cot\varphi = \dfrac{4\delta}{b} = \dfrac{4 \times 0{,}032}{0{,}4} = 0{,}32 \rightarrow \varphi = 72{,}26°$
Angle de la bielle inclinée avec la facette du nœud : $\omega = \varphi - \theta$ Si ω < 0, traction horizontale fendant le noeud : inacceptable	ω = 57,38 - 45,44 = 11,94 > 0	ω = 72,26 – 44,01= 28,25 > 0
Aire de la facette	$A_f = \dfrac{a.b}{\sin\varphi} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}4}{0{,}8423} = 0{,}09498 \text{ m}^2$	$A_f = \dfrac{a.b}{\sin\varphi} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}4}{4 \times 0{,}9524} = 0{,}08399 \text{ m}^2$
Contrainte normale sur la facette du nœud	$\sigma = \dfrac{N.\cos\omega}{2\sin\theta.A_f} = \dfrac{0{,}96 \times 0{,}9784}{2 \times 0{,}7125 \times 0{,}09498} = 6{,}94 \text{ MPa}$	$\sigma = \dfrac{N.\cos\omega}{2\sin\theta.A_f} = \dfrac{0{,}96 \times 0{,}8809}{2 \times 0{,}6948 \times 0{,}08399} = 7{,}25 \text{ MPa}$
Cisaillement	$\tau = \sigma.\tan\omega = 6{,}94 \times 0{,}2115 = 1{,}47 \text{ MPa}$	$\tau = \sigma.\tan\omega = 7{,}25 \times 0{,}5373 = 3{,}90 \text{ MPa}$
Vérification $\sigma_{max} = \dfrac{\sigma}{2} + \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \le \sigma_{Rd,max} = 16{,}5$	$\sigma_{max} = \dfrac{6{,}94}{2} + \sqrt{\dfrac{6{,}94^2}{4} + 1{,}47^2} = 7{,}24 < 16{,}5$ MPa OK	$\sigma_{max} = \dfrac{7{,}25}{2} + \sqrt{\dfrac{7{,}25^2}{4} + 3{,}90^2} = 8{,}95 < 16{,}5$ OK
Section des armatures inférieures : $A_s = \dfrac{N_{Ed}.\cot\theta}{2 f_{yd}}$	$A_{sx} = \dfrac{0{,}96 \times 0{,}9848 \times 10^4}{2 \times 435} = 10{,}87 \text{ cm}^2$	$A_{sy} = \dfrac{0{,}96 \times 1{,}035 \times 10^4}{2 \times 435} = 11{,}42 \text{ cm}^2$

ANNEXE B – CROCHETS OU BARRES DROITES



Longueur d'ancrage : $L_{bd} = \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4.\alpha_5.\left(\dfrac{f_{yk}.\gamma_C}{6{,}3 f_{ctm}.\gamma_S}\right).\varnothing.\dfrac{A_{s,rqd}}{A_{s,prov}}$

Pour une section d'armatures nécessaire $A_{s,rqd}$ et une section mise en place $A_{s,prov}$.

Avec $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$ et $\alpha_2 = 1 - 0{,}15\dfrac{c_{nom}}{\varnothing} \geq 0{,}7$

Posons $\lambda = 0{,}5A - 0{,}35a$

- Si $L_{bd} < \dfrac{\lambda}{4}$ → possibilité de disposer les armatures par moitié en barres droites de longueur $L = 0{,}5A\sqrt{2} + (0{,}7 - 0{,}35\sqrt{2}).a = 0{,}71A + 0{,}21a$ et l'autre moitié en longueur A ou bien encore des barres droites de longueur 0,86A + 0,10a alternées et décalées (en réalité, il faut retrancher un enrobage d'extrémité au moins égal à c_{nom}[1]
- Si $L_{bd} > \dfrac{\lambda}{2}$ → barres avec crochets aux deux extrémités avec un mandrin de cintrage de diamètre 4Ø et une longueur droite après courbure de 5Ø.
- Si $\dfrac{\lambda}{4} < L_{bd} < \dfrac{\lambda}{2}$ → on dispose de barres droites sans crochets sur toute la largeur de la semelle

Pour un béton coulé sur béton de propreté avec un enrobage au nu de 30 mm

Ø	8	10	12	14	16	20	25	32
α_2	0,7	0,7	0,7	0,7	0,72	0,78	0,82	0,86

Pour les Recommandations Professionnelles

- si L_{bd} > A/4 : « il est nécessaire de prévoir des crochets d'ancrage pour la totalité des barres »
- si A/8 < L_{bd} ≤ A/4 : « on peut prévoir que toutes les barres sont droites donc sans crochets d'ancrage »
- si L_{bd} ≤ A/8 : « « on peut prévoir que la moitié des barres est sans crochets d'ancrage et couvre toute la, largeur de la semelle (soit A) et que l'autre moitié des barres est sans crochets d'ancrage et couvre une longueur de 0,8A axée »

[1] Il est rappelé que c_{nom} est égal à 30 mm pour des faces de semelles coulées au contact d'un autre béton (de propreté par exemple) et 65 mm pour un béton coulé contre la terre