

EFFORT TRANCHANT ET CISAILLEMENT EN BÉTON ARMÉ
SECTIONS RECTANGULAIRES, EN TÉ, CIRCULAIRES
ENTIÈREMENT COMPRIMÉES, PARTIELLEMENT TENDUES
OU ENTIÈREMENT TENDUES

DALLES, POUTRES, POTEAUX, PIEUX

=====

Sommaire

1 – Rappels de Résistance des matériaux	2
2 - Vérification de la résistance à l'effort tranchant de l'EC2	2
3 - La vérification $\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd,max}$ est-elle pertinente ?	2
4 - Recherche d'une méthode de calcul du cisaillement	3
5 - Méthode de la contrainte de compression dans la bielle	5
6 – Textes existants	7
7 – Conclusion	8
Annexe A Rappels de résistance des matériaux	9
Annexe B Caractéristiques géométriques d'une calotte circulaire	15
Annexe C Flexion simple – Section circulaire – Béton tendu négligé	16
Annexe D Section circulaire en béton armé avec différents efforts normaux	18
Annexe E Programme n° 140 – Section partiellement tendue	22
Annexe F Effort tranchant et cisaillement des sections rectangulaires	26
Annexe G Etude d'un pieu ou d'un poteau circulaire	30
Annexe H Section béton armé fissurée à comportement non élastique	33
Annexe I Section circulaire entièrement comprimée ou entièrement tendue	39

Feuilles de calcul Excel sur www.egfbtp.com

- n° 139 – Cisaillement de sections rectangulaires
- n° 140 – Cisaillement de sections circulaires
- n° 179 – Cisaillement de sections quelconques

La méthode de vérification de la résistance à l'effort tranchant de l'Eurocode 2 est-elle généralisable aux sections quelconques et à des sollicitations quelconques ?

1 – Rappel de Résistance des matériaux – Calcul du cisaillement - Matériau élastique linéaire

Voir démonstrations en Annexes A, B et C

Section	Rectangulaire b.h	Circulaire diamètre D
non fissurée	$\tau_{\max} = \frac{3V}{2b.h}$ ou $\tau_{\max} = \frac{V}{b.z}$ avec $z = \frac{2h}{3}$	$\tau_{\max} = \frac{16V}{3\pi.D^2}$ ou $\tau_{\max} = \frac{V}{b.z}$ avec $b.z = \frac{3\pi.D^2}{16} \approx 0,59D^2$
fissurée	$\tau_{\max} = \frac{V}{b.z}$ avec z = bras de levier du couple élastique	Variable

2 - Vérification de la résistance à l'effort tranchant suivant l'EC2

La vérification de l'effort tranchant $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$ au moyen de l'équation 6.9 du 6.2.3(3) de l'EC2 :
 $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\cot \theta + \sin \theta)$ peut se ramener à la vérification d'un cisaillement en divisant l'effort par $b_w \cdot z$:

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z} \leq \alpha_{cw} v_1 f_{cd} / (\cot \theta + \sin \theta)$$

En réalité, si l'on remarque que :

- l'effort de compression de la bielle inclinée de θ sur l'horizontale vaut $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta}$,
- la section droite de la bielle inclinée est égale à $S_b = b_w \cdot z \cdot \cos \theta$,
- la contrainte de compression de la bielle est égale à $\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{b_w \cdot z \cdot \cos \theta}$
- avec $\frac{1}{\cot \theta + \sin \theta} = \sin \theta \cdot \cos \theta$,
- le paramètre v_1 vaut $v_1 = 0,6(1 - f_{ck}/250)$
- la vérification de l'équation (6.9) conduit donc à $\sigma_b \leq \alpha_{cw} v_1 f_{cd}$ qui n'est autre que la condition à vérifier pour la compression des bielles de l'équation (6.56) au coefficient α_{cw} près.

Le coefficient α_{cw} prend en compte l'amélioration de la résistance au cisaillement dû à la présence d'un effort normal de compression éventuel.

L'inconvénient de l'introduction de ce coefficient α_{cw} est de pénaliser la résistance pour des compressions élevées au-delà de $0,6f_{cd}$, mais surtout de n'accorder aucune résistance à l'effort tranchant des sections soumises à des tractions.

Autrement dit, la vérification du cisaillement de l'équation (6.9) n'est autre que la vérification de la compression de la bielle inclinée et non une vérification de cisaillement au sens strict du terme.

3 - La vérification $\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd,max}$ est-elle pertinente ?

Autant on comprend ce que signifie un non-écrasement de la bielle, autant il est difficile de définir un critère de cisaillement limite. C'est bien ce qu'on voulu dire les auteurs de l'équation (6.9) de l'EC2.

On peut donc ramener la vérification de l'effort tranchant d'une section de forme quelconque à la vérification de non-écrasement de la bielle.

Pour une section rectangulaire, la largeur de l'âme est connue. En flexion simple d'une section fissurée, le bras de levier z est facile à déterminer en fonction du moment réduit $\mu = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$:

$$z = 0.5d \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu} \right).$$

On peut en déduire aisément le cisaillement agissant $\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z}$ et le comparer à la limite de l'EC2 :

$$\tau_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot (0.6(1 - f_{ck} / 250)) \cdot f_{cd}.$$

Pour une section quelconque, comment déterminer z et b_w ?

Si pour b_w on retient la plus petite largeur de la section droite, le $b_{w,min}$ d'une section circulaire est nul. Pour une section où les armatures sont distribuées sur toute la hauteur de la section, quel sens donner à la hauteur utile ? La plus grande distance de la fibre supérieure à l'armature située au plus bas de la section ? La mi-hauteur de la section ? De même, quelle valeur retenir pour le bras de levier ?

On voit bien qu'il faut chercher une autre définition des paramètres de vérification de l'effort tranchant que ceux donnés à l'article 6.2.3 de l'EC2.

4 - Recherche d'une méthode de calcul du cisaillement agissant quels que soient la forme de la section droite de l'élément, la distribution des armatures longitudinales, la résistance ou non à la traction du béton et l'effort normal éventuel (traction ou compression).

Pour cela, il faut revenir à la définition du cisaillement de la Résistance des matériaux.

D'après le théorème de Cauchy, le cisaillement vertical est égal au cisaillement horizontal (Annexe A).

Pour tout plan horizontal coupant l'élément à une cote y (distance de ce plan à la fibre supérieure par exemple), la contrainte de cisaillement est le rapport de la différence d'effort normal appliqué par les contraintes de compression (flexion et effort normal extérieurs) entre deux plans verticaux voisins, comme cela est expliqué en Annexe A).

On retient donc l'équation $\tau(y) \cdot b(y) \cdot dx = F(x + dx, y) - F(x, y) = dF(x, y)$ qui conduit à $\tau(y) = \frac{dF(x, y)}{b(y) \cdot dx}$

Donc, pour tout y variant de 0 à h , on aura $dF(x, y) = \int_y^h [\sigma(x + dx, \eta) - \sigma(x, \eta)] \cdot b(\eta) \cdot d\eta$.

La courbe $\tau(y)$ variera de zéro en fibre supérieure, passera par un maximum et reviendra à zéro en fibre inférieure (puisque'il y a équilibre des forces internes de la section, la résultante globale est nulle).

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle peut conduire, dans certains cas et localement, à des pointes de cisaillement surprenantes. Par exemple pour une section circulaire en flexion composée de traction avec une fibre neutre proche de la fibre supérieure et au-dessus de la première armature où la largeur de la section est faible.

Exemple.

Section circulaire de 0,80 m de diamètre en flexion composée de traction soumise aux sollicitations suivantes :

$$M_{Ed} = 0,2 \text{ MNm}$$

$$V_{Ed} = 0,7 \text{ MNm}$$

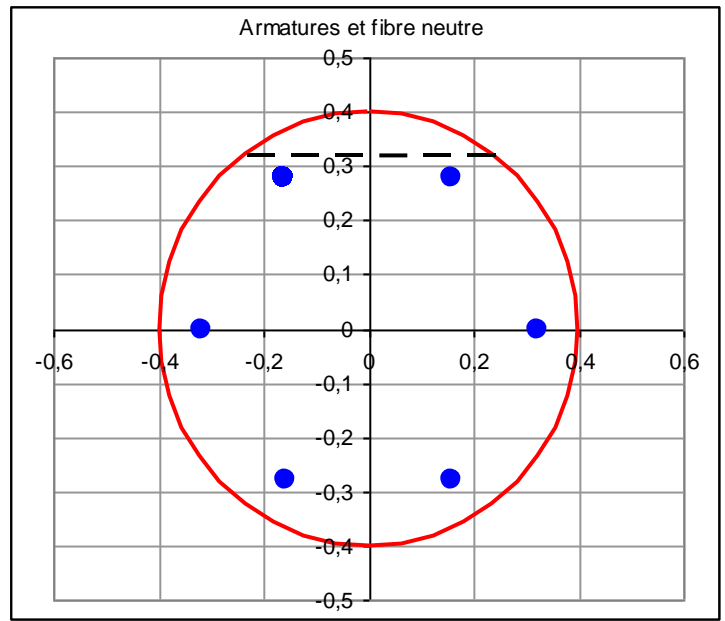
$$N_{Ed} = -1,5 \text{ MN}$$

armée de 6HA32

La section est partiellement tendue avec une partie comprimée de 0,082 m de hauteur.

Les déformations de la section sont :
2,208 ‰ en haut et -19,316 ‰ en bas.

En dressant un tableau de calcul comme celui-ci-dessous (extrait des 20 premières lignes sur un total de 100), on détermine la courbe des cisaillements avec sa pointe à 12 MPa.



	y	ε	η	σ	ε	η	σ	$\Delta\sigma$	b	dN	dN cum	dNf	tau
0	0	2,20815	1,104075	16,667	2,89393	1,446965	16,667	0	0,000	0	0	0	0,00
1	0,008	1,9929105	0,99645525	16,666	2,6237897	1,31189485	16,667	0,000209421	0,159	2,66715E-07	2,66715E-07	0	0,00
2	0,016	1,777671	0,8888355	16,461	2,3536494	1,1768247	16,667	0,205959101	0,224	0,000369079	0,000369345	0	0,16
3	0,024	1,5624315	0,78121575	15,869	2,0835091	1,04175455	16,667	0,797775801	0,273	0,001741957	0,002111302	0	0,77
4	0,032	1,347192	0,673596	14,891	1,8133688	0,9066844	16,522	1,6305295	0,314	0,00408982	0,006201122	0	1,98
5	0,04	1,1319525	0,56597625	13,527	1,5432285	0,77161425	15,797	2,270276079	0,349	0,006333379	0,012534501	0	3,59
6	0,048	0,916713	0,4583565	11,777	1,2730882	0,6365441	14,465	2,687958164	0,380	0,00817094	0,020705441	0	5,45
7	0,056	0,7014735	0,35073675	9,641	1,0029479	0,50147395	12,525	2,883575755	0,408	0,009417418	0,030122859	0	7,38
8	0,064	0,486234	0,243117	7,119	0,7328076	0,3664038	9,976	2,857128851	0,434	0,009921531	0,04004439	0	9,23
9	0,072	0,2709945	0,13549725	4,211	0,4626673	0,23133365	6,819	2,608617452	0,458	0,009555696	0,049600086	0	10,83
10	0,08	0,055755	0,0278775	0,916	0,192527	0,0962635	3,054	2,13804156	0,480	0,00821008	0,057810165	0	12,04
11	0,088	-0,1594845	-0,07974225	0,000	-0,0776133	-0,03880665	0,000	0	0,501	0	0,057810165	0	11,55
12	0,096	-0,374724	-0,187362	0,000	-0,3477536	-0,1738768	0,000	0	0,520	0	0,057810165	0	11,12
13	0,104	-0,5899635	-0,29498175	0,000	-0,6178939	-0,30894695	0,000	0	0,538	0	0,057810165	0	10,74
14	0,112	-0,805203	-0,4026015	0,000	-0,8880342	-0,4440171	0,000	0	0,555	0	0,057810165	0	10,41
15	0,12	-1,0204425	-0,51022125	0,000	-1,1581745	-0,57908725	0,000	0	0,571	0	0,057810165	0	10,12
16	0,128	-1,235682	-0,617841	0,000	-1,4283148	-0,7141574	0,000	0	0,587	0	0,057810165	-0,050648465	1,22
17	0,136	-1,4509215	-0,72546075	0,000	-1,6984551	-0,84922755	0,000	0	0,601	0	0,057810165	-0,050648465	1,19
18	0,144	-1,666161	-0,8330805	0,000	-1,9685954	-0,9842977	0,000	0	0,615	0	0,057810165	-0,050648465	1,17
19	0,152	-1,8814005	-0,94070025	0,000	-2,2387357	-1,11936785	0,000	0	0,628	0	0,057810165	-0,050648465	1,14
20	0,16	-2,09664	-1,04832	0,000	-2,508876	-1,254438	0,000	0	0,640	0	0,057810165	-0,050648465	1,12

y distance du plan étudié à la fibre supérieure

ε déformation $\varepsilon(x)$ de la section à l'abscisse x et $\varepsilon(x+dx)$ à l'abscisse $x+dx$: $\varepsilon = \varepsilon_h + (\varepsilon_b - \varepsilon_h) \cdot y/D$

pour ε_h en haut et ε_b en bas

$\eta = \varepsilon / \varepsilon_{c2}$ (ε_{c2} du 3.1.7(1) de l'EC2)

$$\sigma = (1 - (1 - \eta)^2) f_{cd}$$

$$\Delta\sigma = \sigma(x + dx) - \sigma(x)$$

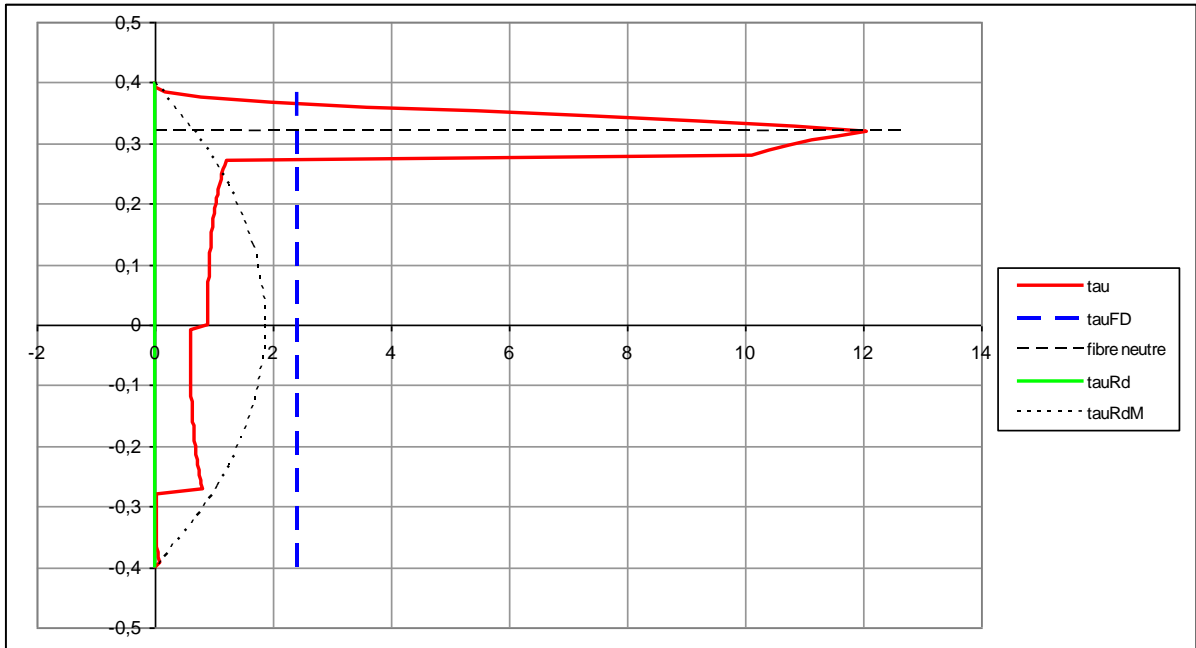
$$b = 2\sqrt{y \cdot (D - y)} \text{ largeur de la section à la cote } y$$

dN = $0,08b \cdot \Delta\sigma$ dont le cumul depuis la fibre supérieure vaut dN_{cum}

$dN_f = \sigma(\varepsilon_s) \cdot A_s$ pour chaque barre ayant une déformée $\varepsilon_s = \varepsilon_h + (\varepsilon_b - \varepsilon_h) \cdot d_i/D$ à la profondeur d_i

$$\tau = dN_{cum} / (dx \cdot b)$$

On constate à la profondeur $y = 0,08$ m, qui correspond d'ailleurs à la fibre neutre (0,082), que le cisaillement est maximal et égal à 12,04 MPa, valeur très au-dessus de la moyenne et qui forme un pic anormal, bien que le calcul soit exact. Ceci montre bien que la variable cisaillement n'est pas un bon critère de vérification. L'apparition de la première armature à la cote 0,128 m vient rétablir une valeur de cisaillement raisonnable.



5 - Méthode de la contrainte de compression dans la bielle

Pour une section en flexion simple donc partiellement tendue, le bras de levier peut être déterminé en recherchant la distance entre la résultante de compression (béton + armatures comprimées) et la résultante de traction (armatures tendues).

Pour une section partiellement tendue en flexion composée, on peut reprendre le même critère de détermination du bras de levier en décomposant z en $z_c + z_t$ représentant les distances de ces deux résultantes au centre du cercle.

Application numérique au cas précédent.

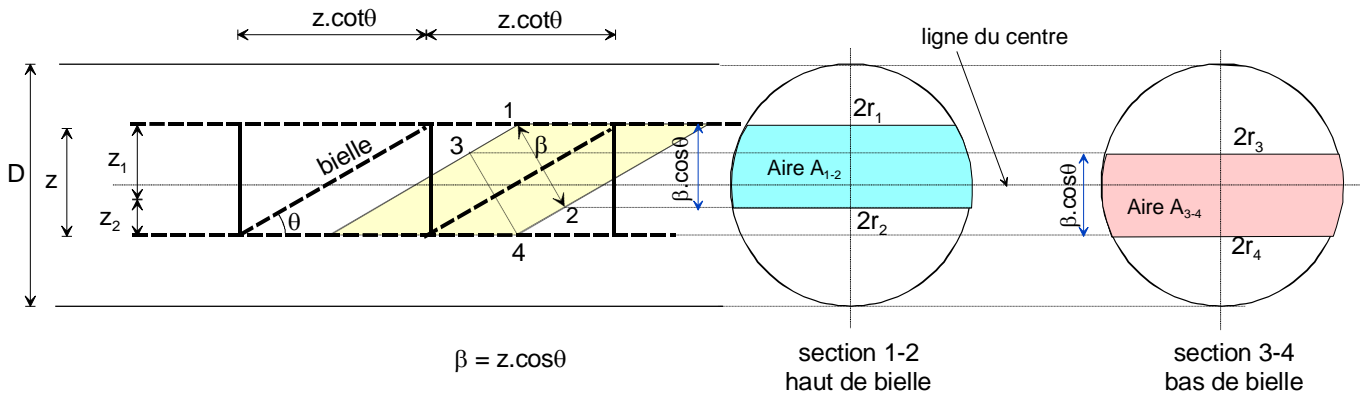
Détermination du bras de levier z	Résultante de compression du béton ¹	Résultante de compression et traction des armatures	Total
Compression F_1	0,2746	0,0000	0,2746
Traction F_2	0	-1,7755	-1,7755
Moment M_1 par rapport à l'axe neutre	0,0119	0,0000	0,0119
M_2 d° en traction	0	0,6649	0,6649
$z_c = M_1/F_1$	0,043	0,000	0,043
$z_t = M_2/z_2$	0	-0,374	-0,374
$z = z_c - z_t$	0,043	0,374	0,418

D'où la valeur du bras de levier ; $z = 0,418$ m.

On a ainsi la longueur horizontale de la bielle inclinée qui vaut $z \cdot \cot\theta$ si l'on a choisi² une inclinaison θ . L'effort de compression dans la bielle vaut $F_b = V_{Ed} / \sin\theta$. Pour une section circulaire, on prend comme largeur b_w le minimum des largeurs de la bielle en haut (au niveau de la résultante de compression) et en bas (au niveau de la résultante de traction), la largeur dans l'autre sens vaut : $\beta = (z \cdot \cot\theta) \cdot \sin\theta = z \cdot \cos\theta$ et pour la section droite de la bielle, voir détail du calcul ci-dessous.

¹ Par intégration avec une déformation linéaire, une contrainte parabolique-rectangle et une largeur b variable

² Voir Annexe F, § 3



En partie	haute	basse	
points	1-2	3-4	
$y_1 = z_c + D/2 - y$	0,361	0,152	$y_3 = y_1 - z \cdot \sin^2 \theta$
$\beta = z \cdot \cos \theta$	0,295	0,295	$\beta = z \cdot \cos \theta$
$\beta \cdot \cos \theta$	0,209	0,209	$\beta \cdot \cos \theta$
$y_2 = y_1 - \beta \cdot \cos \theta$	0,152	-0,057	$y_4 = y_3 - \beta \cdot \cos \theta$
$r_1 = (0,25D^2 - y_1^2)^{0,5}$	0,172	0,370	$r_3 = (0,25D^2 - y_3^2)^{0,5}$
$r_2 = (0,25D^2 - y_2^2)^{0,5}$	0,370	0,396	$r_4 = (0,25D^2 - y_4^2)^{0,5}$
$\tan \alpha_1 = r_1/y_1$	0,476	2,429	$\tan \alpha_3 = r_3/y_3$
$\tan \alpha_2 = r_2/y_2$	2,429	-7,000	$\tan \alpha_4 = r_4/y_4$
α_1	0,445	1,180	α_3 angle au centre
α_2	1,180	1,713	α_4
A_1	0,0090	0,1325	A_3 aire au dessus
A_2	0,1325	0,2964	A_4
$S_b = A_{1-2}$	0,1235	0,1639	A_{3-4} aire de la section droite
$F_b = V_{Ed}/\sin \theta$	0,990	0,990	F_b effort de compression dans la bielle
$\sigma_{b1} = F_b/A_{1-2} \cdot \cos \theta$	5,67	4,27	$\sigma_{b3} = F_b/A_{3-4}$
σ_b	5,67	MPa	contrainte de compression maximale

La limite de compression de la bielle est donnée par l'équation (6.56) de l'EC2 et vaut, compte tenu de la présence de serces tendues la traversant :

$\sigma_{Rd,max} = 0,6(1 - f_{ck}/250) \cdot (f_{ck}/\gamma_C) = 0,6 \times (1 - 25/250) \times 25/1,5 = 9$ MPa. On a bien $5,67 < 9$ MPa, alors que le cisaillement dépassait largement la limite donnée par l'équation (6 ;9) :

$$\tau_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot v \cdot f_{cd} / (\tan \theta + \cot \theta) = \alpha_{cw} \times 0,6 \times (1 - 25/250) \times 25/1,5 / (1 + 1) = 4,5 \alpha_{cw}$$

Comme l'EC2 ne donne pas de valeur pour le cas d'un effort normal de traction, on pourrait en déduire que $\alpha_{cw} = 0$.

Le Guide d'application de l'EC2 FD P18-717 a apporté une précision concernant le cas d'effort normal de traction et faute d'une étude précise, a limité la contrainte moyenne $\sigma_{cp} = -f_{ctm} = -2,6$ MPa.

$$\text{Or, } \sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{(\pi D^2 / 4)} = \frac{-1,5}{0,5} = -3 \text{ MPa} < -f_{ctm}, \text{ ce qui conduit à } \alpha_{cw} = 0$$

Même si l'on retenait $\alpha_{cw} = 1$ on trouverait $12,04 \gg 4,5$ MPa. Ce qui n'est pas vérifié.

Ceci pour montrer que la vérification de la résistance à l'effort tranchant telle que définie par l'EC2 en son article 6.2.3 n'est valable que pour des cas de flexion simple ou de flexion composée de compression modérée de sections rectangulaires ou en T.

6 – Textes existants

6.1 – Eurocode 2 : Structures en béton - 2005

L'effort tranchant résistant est donné par l'équation $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \dots (6.9)$.

Elle a été établie pour le cas de section rectangulaire ou en T é en flexion simple et étendue de façon empirique au cas de flexion composée de compression par un coefficient α_{cw} qui prend en compte la résistance accrue du béton comprimé à l'effort tranchant.

Pour les sections autres, circulaire par exemple, on peut calculer l'effort de compression dans la bielle

$F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta}$ et l'aire de la section droite de la bielle S_b et écrire que la contrainte de compression ne

dépasse pas la valeur limite $\sigma_{Rd,max}$ donnée par l'équation (6.56) de l'EC2 : $\sigma_{Rd,max} = 0,6(1 - f_{ck} / 250)f_{cd}$

6.2 Eurocode 8 – Résistance aux séismes - EC8 § 5.6.3.3

Extrait

(2) Pour les sections de béton circulaires de rayon r où l'armature longitudinale est répartie sur un cercle de rayon r_s , et à moins qu'un calcul plus précis ne soit effectué, la hauteur utile :

$$d_e = r + \frac{2r_s}{\pi} \quad \dots (5.9)$$

peut être utilisée au lieu de d dans les expressions appropriées de la résistance à l'effort tranchant. La valeur du bras de levier interne z peut être supposée égale à : $z = 0,9d_e$.

6.3 – Guide pour l'application de l'Eurocode 2 FD P18-717

Extrait du Guide EC2 – FD P18-717

6.2.1 - Formule de cisaillement des sections circulaires - (V) - Comment étudier le cisaillement dans un tel cas ?

La démarche consiste à faire l'étude des contraintes normales en flexion composée (béton tendu négligé) dont on déduit la distribution des cisaillements. On en déduit le cisaillement moyen dont la valeur est à vérifier par rapport à la limite donnée à la Section 6.

Dans les cas de flexion simple, on peut se rattacher au calcul d'une section rectangulaire de largeur $b_w = 0,6 D$ avec un $z = 0,9 d$, dès lors qu'il y a au moins 6 barres longitudinales (avec D diamètre de la section circulaire et d hauteur utile de la barre longitudinale la plus éloignée).

En calculant le cisaillement avec le programme n° 140, on constate que cette formule est quelquefois (mais rarement) mise en défaut de sécurité.

6.4 – Projet de futur Eurocode 2 - Draft 2-octobre 2017 de l'EC2

Article 6.2.3 (8) et Fig. 6.8

(8) For sections with variable width:

- b_w is the smallest width of the cross section in the tensile area (Figures 6.8a and b)

- the area A_{sw} to be used in this subsection has to be multiplied by $\cos \delta$ (refer to Figure 6.8a).

For circular cross sections:

- the area A_{sw} has to be multiplied by the ratio b_w/D_h (refer to Figure 6.8c);

- z is based on a section fitted into the circular section as defined in Figure 6.8c where

the circular segment with depth λ_x is the area of the compression chord and the tension bars within b_w define the tension chord).

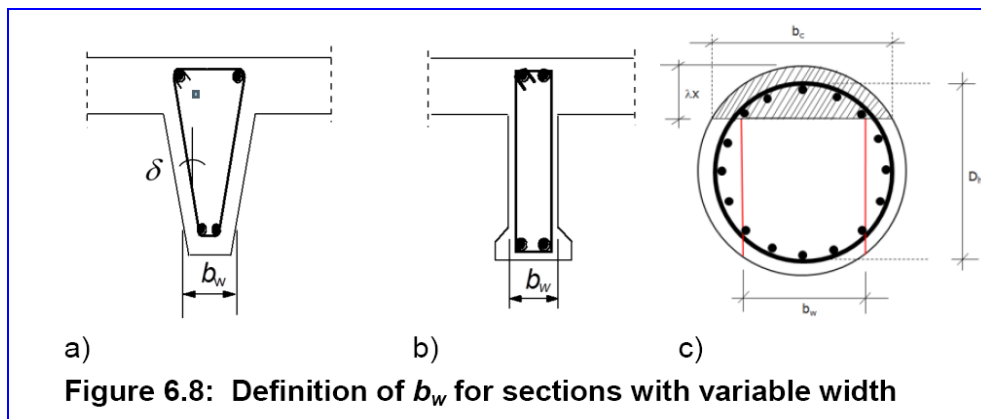


Fig. 19 – Extrait du Draft 2 d el'EC2-2017

Critique de la proposition du Draft 2 - 2017-10-27

1 - Pourquoi la largeur b_w de la section circulaire est-elle limitée à la partie entre armatures et non toute la largeur au droit de la fibre neutre ? C'est le béton qui résiste au cisaillement, sinon pourquoi ne pas appliquer la même règle aux sections rectangulaires ?

2 – Dans le cas de section partiellement tendue, pourquoi ne pas prendre comme bras de levier z la distance entre la résultante de compression (béton comprimé + armatures comprimées) et la résultante de traction des armatures tendues et comme largeur b_w , la largeur au droit de l'axe neutre ?

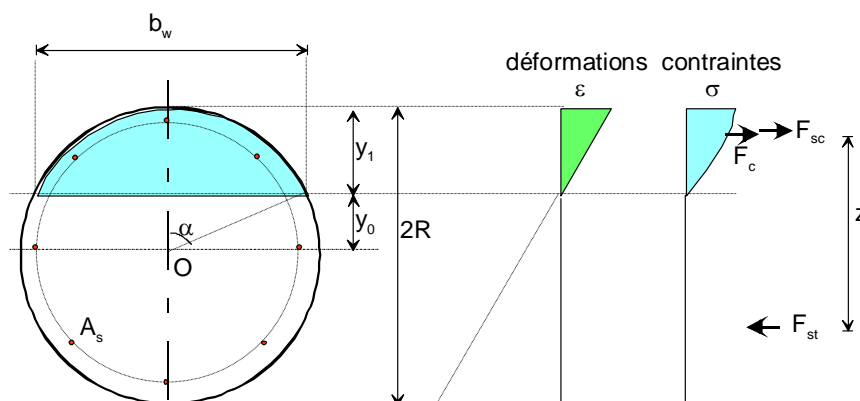


Fig. 20 – Section partiellement tendue

6.5 – Exercice comparatif en compression simple

Diamètre pieu : 0,6 m ; distance à l'axe des armatures au parement : $u = 60 + 8 + 20/2 = 78$ mm

Sollicitations : $N_{Ed} = 1$ MN, $M_{Ed} = 0$, $V_{Ed} = 0,4$ MN

La section est entièrement comprimée.

La méthode des bielles est calculée avec la feuille de calcul Excel n° 140.

On constate la disparité des résultats, mais la méthode la plus sûre, au sens de représentant le mieux la réalité, est la méthode de non écrasement de la bielle inclinée.

La méthode de Résistance des Matériaux $dF/(b.dx)$ peut conduire dans certains cas de section partiellement tendue avec une hauteur comprimée faible.

	RdM	FD P18-717	EC8-2:2006	Méth. dF/(b.dx)	Méth. bielle	
diamètre pieu	D	0,6	0,6	1,6	0,6	m
enrobage axe	u	0,086	0,086	0,086	0,086	m
hauteur utile	d	0,514	0,514	1,514	0,514	m
rayon	r	0,3	0,3	0,8	0,3	m
largeur	b		0,6D	D ?		
	b		0,36	0,6		m
bras de levier	z		0,9d			
	z		0,463	0,393	0,255	m
	b.z		0,167	0,236		m ²
cisaillement	τ	$\tau = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{V}{D^2} = 1,7 \frac{V}{D^2}$	$\tau = \frac{V}{b.z}$	$\tau = \frac{V}{b.z}$	σ_{bielle}	
	τ	1,89	2,40	1,70	7,3	MPa = V/(b.z)
	τ_{Rd}	4,02	4,02	4,02	9	MPa
		47%	60%	42%	48%	81%

Pour les sections circulaires, sont inexploitable :

Draft EC2:2017 : uniquement pour une section partiellement tendue

EC2-1-1:2005 : rien de précisé

EC8-2:2006 $\left[z = 0,9 \left(r + \frac{2(d-D/2)}{\pi} \right) \right]$ mais rien sur b

7 – Conclusion

En flexion simple, les valeurs limites de cisaillement données par le Guide FD P18-717 avec $b_w = 0,6D$ et $z = 0,9d$, soit un produit $b_w.z = 0,54D.d$ sont satisfaisantes, même si les valeurs b_w et z prises individuellement ne sont pas très représentatives.

Dans les cas limites, il est bon de vérifier la résistance à l'effort tranchant par la recherche du cisaillement maximal et de le comparer au cisaillement limite. Mais quel cisaillement limite retenir ? Celui de l'EC2 (Eq. 6.9) est une façon détournée de vérifier la compression dans la bielle inclinée pour le cas de flexion simple. Celui du FD P18-717, moins précis, mais plus sécuritaire couvre la plupart des cas courants. La meilleure méthode est de vérifier la compression de la bielle inclinée. La plus précise est d'utiliser le programme de calcul n° 140.

Pour un dimensionnement, on pourra retenir la proposition du Guide d'utilisation de l'EC2 FD P18-717, art. 6.2.1, rappelé en 6.2 ci-dessus : $b_w = 0,6 D$ avec un $z = 0,9 d$.

Ce qui conduit à un produit $b_w.z = 0,54d.D \approx 0,5D^2$ pour le calcul de la contrainte de cisaillement par

l'expression $\tau = \frac{V_{Ed}}{0,5D^2}$.

ANNEXE A

RAPPEL DE RESISTANCE DES MATERIAUX

1 - Sollicitations³

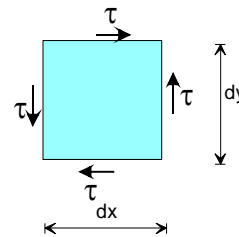
On appelle sollicitations : l'effort tranchant V , le moment fléchissant M , l'effort normal N et le moment de torsion T .

Une contrainte normale σ est égale au rapport de l'effort normal et de la section d'application : $\sigma = \frac{N}{S}$.

Un cisaillement τ est égal au rapport de l'effort tranchant et d'une surface réduite d'effort tranchant S' qui dépend de la forme de la section (rectangulaire, circulaire ...) : $\tau = \frac{V}{S'}$.

Théorème de Cauchy

L'équilibre du rectangle de côtés dx et dy est assuré si les cisaillements des quatre faces sont égaux en valeur absolue et s'ils sont convergents ou divergents deux à deux pour deux sommets opposés.



Il en résulte que dans un élément (dalle, poutre, poteau, etc.), le cisaillement vertical en un point est égal au cisaillement horizontal.

Fig. 1 – Cisaillement sur les faces d'un rectangle de côtés dx et dy

Relation entre effort tranchant et moment fléchissant de deux sections voisines

Abscisse	x	$x + dx$
Effort tranchant	V	$V + dV$
Moment	M	$M + dM$

A l'abscisse $x + dx$, on a :

$M + dM = M + V \cdot dx + dV \cdot dx$ d'où $dM = V \cdot dx$ en

négligeant la différentielle du 2^e ordre, soit $V = \frac{dM}{dx}$

L'effort tranchant est la dérivée du moment en fonction de l'abscisse de calcul.

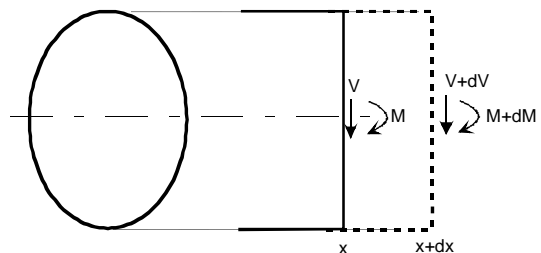


Fig. 2 – Sollicitations aux abscisses x et $x + dx$

2 - Cisaillement en flexion simple

En résistance des matériaux des poutres, on suppose les hypothèses suivantes :

- Hypothèse de Navier-Bernoulli : une section plane reste plane après déformation
- Loi de Hooke. les contraintes sont proportionnelles aux déformations

³ Appelées « effets des actions » dans le langage *eurocodien*, d'où l'indice E pour N_{Ed} , M_{Ed} , V_{Ed} , ...

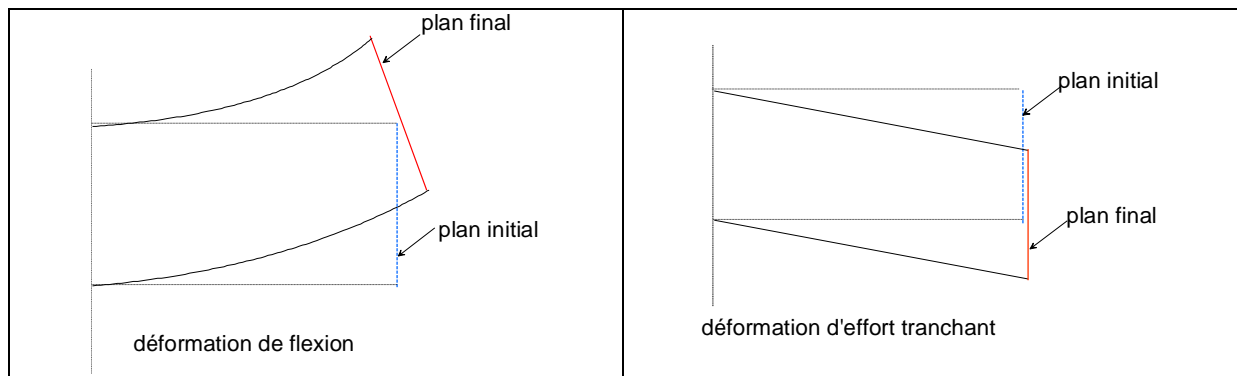


Fig. 3 – Hypothèse de Navier-Bernoulli

Notations.

- M moment fléchissant
- I moment d'inertie de la section totale brute ($I = b \cdot h^3/12$ pour un rectangle, $I = \pi \cdot R^4/4$ pour un cercle de rayon R, voir Annexe B)
- μ moment statique (voir Annexe B)
- σ contrainte de compression (+) ou de traction (-)
- τ contrainte de cisaillement

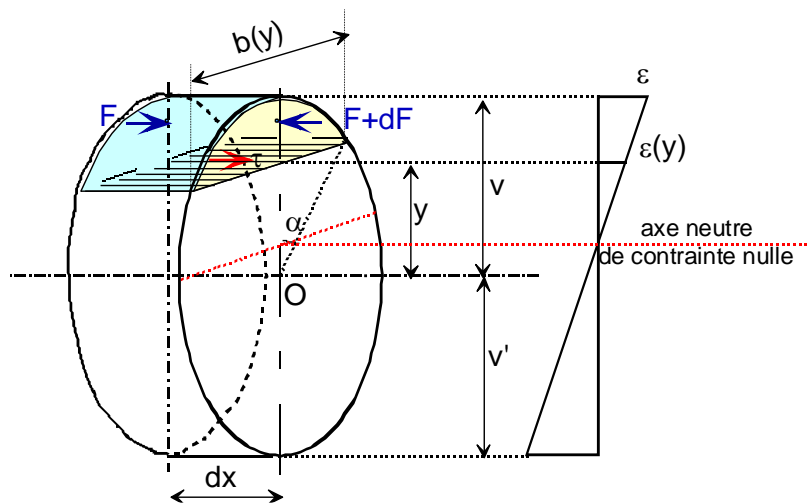


Fig. 4 – Calcul du cisaillement à la cote y

En écrivant l'équilibre du morceau de cylindre situé au-dessus de la cote y entre les abscisses x et x+dx, on obtient :

$$dF = \tau(y) \cdot b(y) \cdot dx = \int_y^v b(\eta) \cdot d\sigma(\eta) \cdot d\eta \text{ et comme : } \sigma(\eta) = \frac{M \cdot \eta}{I} \text{ dans le domaine élastique linéaire}$$

$$\tau(y) \cdot b(y) \cdot dx = \int_y^v b(\eta) \cdot \frac{dM \cdot \eta}{I} \cdot d\eta = \frac{dM}{I} \int_y^v b(\eta) \cdot \eta \cdot d\eta = \frac{\mu(y) \cdot dM}{I}$$

$$\tau(y) = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{\mu(y)}{I \cdot b(y)} = \frac{V \cdot \mu(y)}{I \cdot b(y)} \text{ car l'effort tranchant est la dérivée du moment.}$$

La résultante de compression vaut :

$$F_c = \int_y^v \sigma(z) \cdot b(z) \cdot dz = \frac{M}{I} \int_y^v b(z) \cdot z \cdot dz = \frac{M}{I} \cdot [\mu(z)]_y^v = \frac{M}{I} \cdot \mu(y) \text{ car } \sigma(z) = \frac{M \cdot z}{I} \text{ avec } \mu(y) \text{ le moment statique de}$$

la partie située au-dessus de la cote y par rapport au centre de gravité.

De même, la résultante des efforts de traction en-dessous du centre de gravité vaut :

$F_t = -\int_{v'}^0 \sigma(z).b(z).dz = \frac{M}{I}.\mu(0)$ car le moment statique de la partie au-dessus du centre de gravité est égal au moment statique de la partie située en dessous par définition du centre de gravité.

En dérivant par rapport à l'abscisse x, on trouve : $\frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{\mu(y)}{I} = V \cdot \frac{\mu(y)}{I}$ d'où le cisaillement τ à la

$$\text{cote } y : \tau = \frac{dF}{b(y).dx} = \frac{V.\mu(y)}{I.b(y)}$$

Le cisaillement maximal est obtenu pour le maximum du moment statique, c'est-à-dire au centre de gravité de la section par définition de ce dernier : $\tau_{\max} = \frac{V.\mu(0)}{I.b(0)}$

Le couple élastique des forces F_c et F_t a un bras de levier z tel que $M = F_c.z = F_t.z$, d'où $z = \frac{M}{F_c} = \frac{I}{\mu(0)}$

On en déduit la valeur du cisaillement maximal : $\tau_{\max} = \frac{V}{z.b(0)}$

a) Pour une section rectangulaire de côtés b et h en flexion simple d'un matériau homogène à comportement linéaire et résistant à la traction :

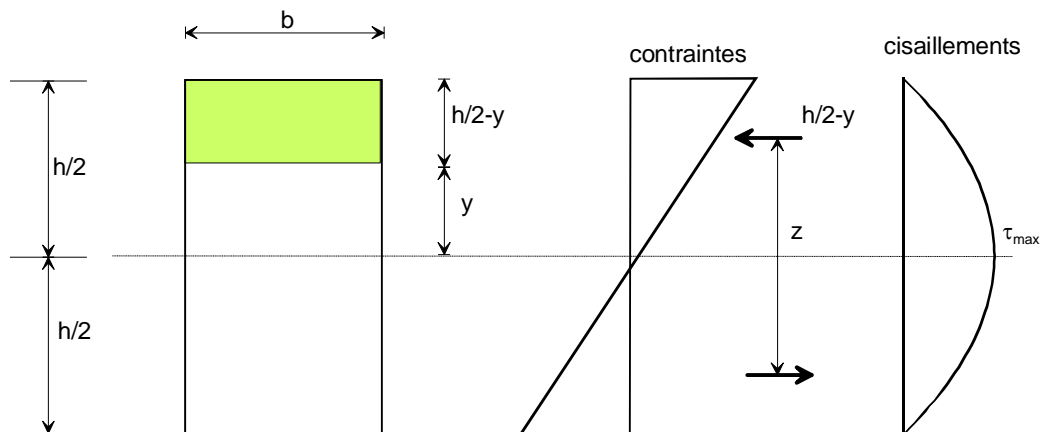


Fig. 5 – Section rectangulaire

Moment d'inertie de la section : $I = \frac{bh^3}{12}$ et moment statique de la section à la cote y par rapport à

l'axe de symétrie Δ : $\mu = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) / 2 = \frac{b \cdot (h^2 - 4y^2)}{8}$

d'où $\tau(y) = \frac{V.\mu(y)}{I.b} = \frac{12V}{8b} \cdot \frac{b \cdot (h^2 - 4y^2)}{b.h^3} = \frac{3V}{2b} \cdot \frac{(h^2 - 4y^2)}{h^3}$ (parabole)

Le cisaillement maximal est obtenu pour $y = 0$ et vaut : $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{b.h}$

Ou encore $\tau_{\max} = \frac{V}{b.z}$ avec $z = \frac{2}{3}.h$

b) Pour une section circulaire de diamètre $D = 2R$ en flexion simple d'un matériau homogène à comportement linéaire et résistant à la traction (voir Annexe B) :

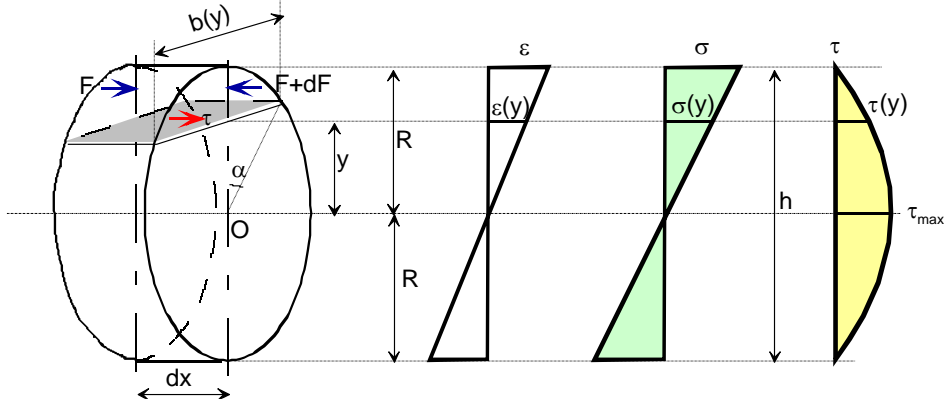


Fig. 6 – Contraintes normales et de cisaillement d'une section circulaire

$$I = \frac{\pi R^4}{4} \text{ et } \mu = \frac{2R^3}{3} \cdot \sin^3 \alpha \text{ avec } \cos \alpha = \frac{y}{R} \text{ d'où } \tau = \frac{4V}{3\pi R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \text{ (parabole)}$$

Le cisaillement maximal est obtenu pour $\alpha = \pi/2$ et vaut :

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{S} = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{V}{D^2} \approx 1,7 \frac{V}{D^2}$$

Ou encore $\tau_{\max} = \frac{V}{b_w \cdot z}$ en posant $b_w \cdot z = \frac{3\pi D^2}{16} \approx 0,59 D^2$

3 – Cisaillement en flexion composée de compression ou traction - Section quelconque d'un matériau homogène, non fissuré à comportement élastique

La contrainte normale à la cote η vaut : $\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M \cdot \eta}{I}$ et sa dérivée en fonction de l'abscisse x :

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{\eta}{I} = V \cdot \frac{\eta}{I} \text{ en supposant que l'effort normal ne varie pas en fonction de l'abscisse}$$

On va donc retrouver le même cisaillement que pour la flexion simple.

En flexion composée, dans le domaine élastique d'un matériau résistant à la traction, le cisaillement est indépendant de l'effort normal.

4 – Section quelconque et matériau quelconque - Flexion simple ou composée - Méthode générale

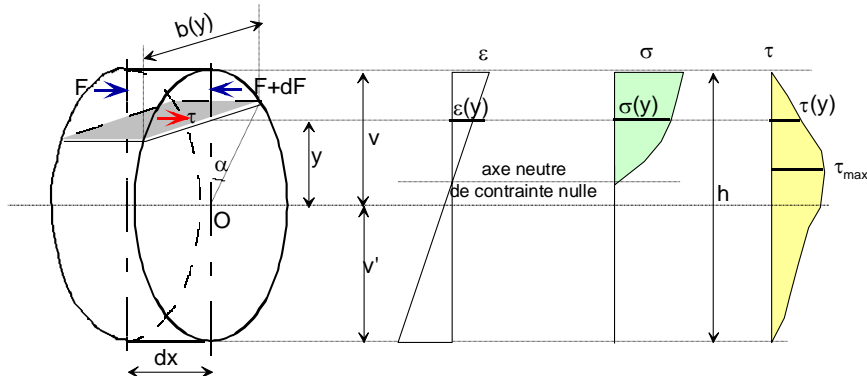


Fig. 7 – Contraintes normales et de cisaillement de section quelconque

L'équilibre de la portion de cylindre située au-dessus de la cote y est assuré en écrivant :

$$dF = \tau(y).b(y).dx = \int_y^v b(\eta).d\sigma(\eta).d\eta$$

Cette formule est générale et valable quels que soient :

- la forme de la section béton : rectangulaire, en T, circulaire, ...
- le diagramme contrainte-déformation du matériau
- la résistance ou non du béton à la traction
- et que la section soit entièrement comprimée, partiellement tendue ou entièrement tendue (flexion simple ou composée)

Pour des sollicitations agissantes données M_{Ed} , et N_{Ed} , on détermine les déformations du béton en fibre supérieure de la section ε_h et en fibre inférieure ε_b de telle sorte que le moment résistant M_{Rd} et l'effort normal résistant N_{Rd} qui en découlent leur soient égaux.

Puis, à chaque cote η comprise entre les cotes y et v , on calcule la déformation $\varepsilon(\eta)$ du béton, la contrainte $\sigma(\eta)$, la largeur $b(\eta)$ et on intègre le produit $\sigma(\eta).b(\eta).d\eta$ entre les cotes y et v , d'où $F(y,x)$. Un même calcul est à faire à l'abscisse $x+dx$ avec un moment $M_{Ed} + dM_{Ed} = M_{Ed} + V_{Ed}.dx$ d'où $F(y,x+dx)$

Le cisaillement à la cote y vaut :
$$\tau(y) = \frac{F(y, x + dx) - F(y, x)}{b(y).dx} \quad \dots(1)$$

Voir les programmes de calcul n° 139 pour les sections rectangulaires, n° 140 pour les sections circulaires, n° 179 pour les sections quelconques avec axe de symétrie vertical.

5 – Section en béton armé fissurée à comportement élastique linéaire

5.1 - Section rectangulaire

En appliquant la méthode générale, on attribue à toute armature A_s une équivalence de section de béton égale à $n.A_s$ où n est le coefficient d'équivalence $n = E_s/E_c$.

Le moment statique (béton + armatures) augmente paraboliquement pour le béton et par saut pour chaque armature comprimée jusqu'à la fibre neutre. Au-delà de la fibre neutre, et tant qu'il n'y pas d'armature, le cisaillement est constant car on néglige le béton tendu. Ceci jusqu'à la rencontre d'armatures tendues où le cisaillement diminue et pour terminer en fibre inférieure de la section à un cisaillement nul (Fig. 7).

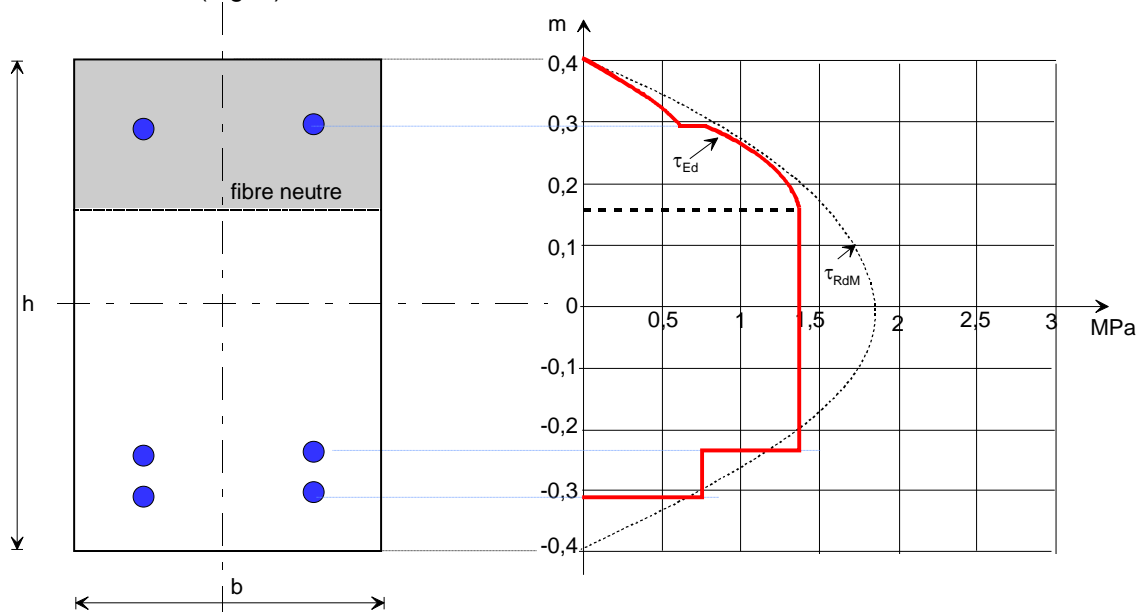


Fig. 8 - Section rectangulaire – Cisaillements calculé τ_{Ed} avec $\tau_{max} = V/(b.z)$ et Résistance des matériaux $\tau_{RdM} = 1,5V/(b.h)$

5.2 - Section quelconque

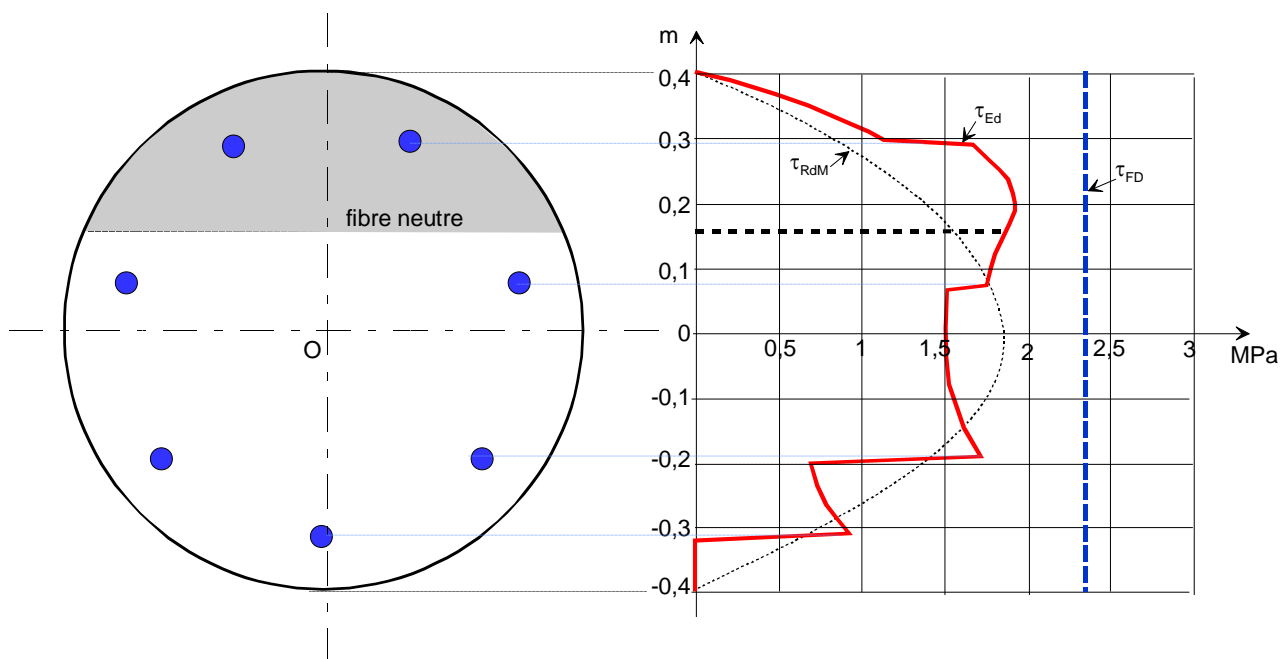


Fig. 9 – Exemple pour une section circulaire - Cisaillements calculé τ_{Ed} , donné par la Résistance des matériaux $\tau_{RdM} = (4/3)V/(\pi.R^2)$ et du Guide FD P18-717 : $\tau_{FD} = V/(d.D)$.

Du fait que la largeur de la section varie en fonction de la cote du point étudié, il est nécessaire de procéder par pas pour déterminer à chaque cote y la largeur $b(y)$, la contrainte du béton et des armatures, de cumuler les efforts situés au-dessus et d'appliquer la formule générale établie plus haut :

$$\tau(y) = \frac{F(y, x + dx) - F(y, x)}{b(y).dx} \quad \dots (1)$$

On constate sur la Fig. 8 que :

- le moment maximal peut ne pas être sur l'axe neutre,
- le cisaillement varie en fonction inverse de la largeur du cercle, ce qui ne permet pas de connaître à l'avance le point de cisaillement maximal
- les nombre, diamètre et position des armatures ont une influence importante sur le cisaillement, surtout en zone tendue.

ANNEXE B

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES D'UNE CALOTTE CIRCULAIRE

1 – Par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre O

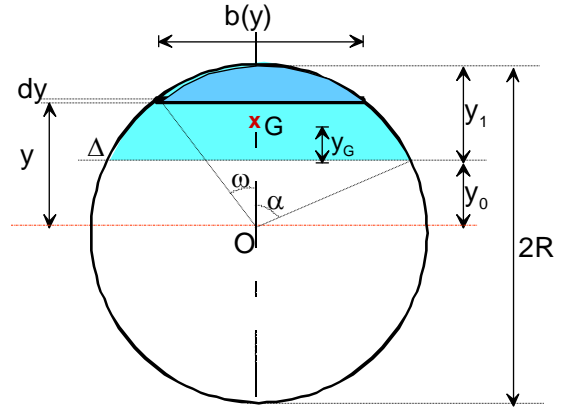
Aire : $S = \int_{y_0}^R b(y).dy$ avec $y = R.\cos\omega$; $dy = -R\sin\omega$

$b(y) = 2R.\sin\omega$ d'où : $S = -\int_{\alpha}^0 2R^2.\sin^2\omega.d\omega$

Or $\sin^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2}$ d'où :

$$S = R^2 \int_0^{\alpha} (1 - \cos 2\omega).d\omega = R^2 \left[\omega - \frac{\sin 2\omega}{2} \right]_0^{\alpha}$$

$$S = R^2 \left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right] \text{ aire calotte d'ouverture } \alpha$$



Moment statique de l'aire de la calotte par rapport à l'axe du centre :

$\mu_0 = \int_{y_0}^R b(y).y.dy = 2R^3 \int_0^{\alpha} \sin^2\omega.\cos\omega.d\omega$. Posons $u = \sin\omega$ et $du = \cos\omega.d\omega$. On obtient :

$$\mu_0 = 2R^3 \int u^2.du = 2R^3 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{\alpha} = 2R^3 \left[\frac{\sin^3\omega}{3} \right]_0^{\alpha}, \text{ soit } \mu_0 = \frac{2R^3}{3}.\sin^3\alpha$$

Moment d'inertie de l'aire de la calotte par rapport à l'axe du centre

$$I_0 = \int_{y_0}^R b(y).y^2.dy = 2R^4 \int_0^{\alpha} \sin^2\omega.\cos^2\omega.d\omega$$

Or, $\sin^2\omega.\cos^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2}.\frac{1+\cos 2\omega}{2} = \frac{1-\cos^2 2\omega}{4} = \frac{1+\cos 4\omega}{8}$

$$I_0 = \frac{R^4}{4} \int_0^{\alpha} (1 + \cos 4\omega).d\omega = \frac{R^4}{4} \left[\omega + \frac{\sin 4\omega}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$I_0 = \frac{R^4}{4} \left[\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right]$$

Pour une section pleine, $\alpha = \pi$ d'où $I_0 = \pi.R^4/4$ et $\mu_0 = 2R^3/3$.

2 – Par rapport à l'axe Δ appelé fibre neutre – Cas d'un matériau ne résistant pas à la traction

Aire identique au cas précédent : $S = R^2 \left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]$

Moment statique de l'aire de la calotte par rapport à l'axe Δ : $\mu_{\Delta} = \int_{y_0}^R b(y).(y - y_0).dy = \mu_0 - y_0.S$

Moment d'inertie de la calotte par rapport à l'axe Δ : $I_{\Delta} = \int_{y_0}^R b(y).(y - y_0)^2.dy = I_0 - 2y_0.\mu + y_0^2.S$

ANNEXE C

FLEXION SIMPLE D'UNE SECTION CIRCULAIRE EN BÉTON ARMÉ DANS LE DOMAINE ÉLASTIQUE – BÉTON TENDU NÉGLIGÉ

La section est armée de n armatures de section A_s chacune et situées à une distance d_i de la fibre la plus comprimée.

- A_s section d'une armature tendue
- d_i distance de l'armature i à la fibre de béton la plus comprimée
- F_c résultante des forces reprises par le béton comprimé
- F_{sc} résultante des forces reprises par les armatures comprimées
- F_{st} résultante des forces reprises par les armatures tendues
- I_0 moment d'inertie du béton comprimé par rapport à l'axe de symétrie⁴ : $I_0 = \frac{R^4}{4} \left[\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right]$
- $I_{\Delta c}$ moment d'inertie du béton comprimé par rapport à l'axe Δ : $I_{\Delta c} = I_0 - 2y_0 \cdot \mu_0 + y_0^2 S$
- $I_{\Delta sc}$ moment d'inertie des armatures comprimées par rapport à l'axe Δ
- $I_{\Delta st}$ moment d'inertie des armatures tendues des armatures comprimées par rapport à l'axe Δ
- I_{Δ} moment d'inertie de l'ensemble (béton + armatures) par rapport à l'axe Δ
- n_{eq} coefficient d'équivalence acier-béton
- n nombre d'armatures régulièrement distribuées sur un cercle
- S aire de la section de béton comprimé (au-dessus de l'axe Δ) : $S = R^2 \left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]$
- y_0 distance de l'axe neutre au centre de la section circulaire
- y_1 hauteur de béton comprimé
- μ_0 moment statique de la calotte circulaire par rapport à l'axe central⁴ : $\mu_0 = \frac{2R^3}{3} \cdot \sin^3 \alpha$
- $\mu_{\Delta c}$ moment statique du béton comprimé par rapport à l'axe $\mu_{\Delta c} = \int_{y_0}^R b(y) \cdot (y - y_0) \cdot dy = \mu_0 - y_0 \cdot S$
- $\mu_{\Delta sc}$ moment statique des armatures comprimées par rapport à l'axe Δ
- $\mu_{\Delta st}$ moment statique des armatures tendues des armatures comprimées par rapport à l'axe Δ

Contrainte du béton à la cote y pour un moment M

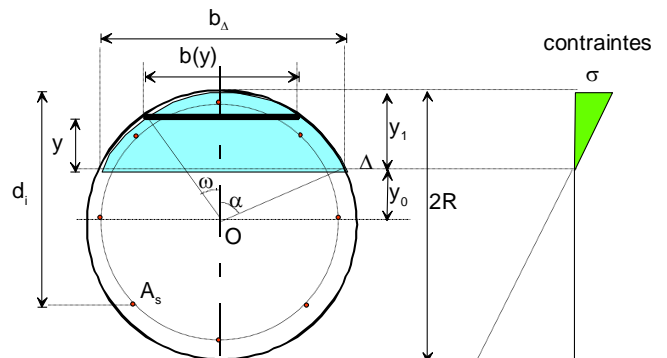
$$\sigma(y) = \frac{M \cdot (y - y_0)}{I_{\Delta}}$$

Résultante de compression du béton :

$$F_c = \int_{y_0}^R \sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy = \frac{M}{I_{\Delta}} \int_{y_0}^R b(y) \cdot (y - y_0) \cdot dy = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot \mu_{\Delta c}$$

Moment du béton comprimé par rapport à l'axe Δ :

$$M_c = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot \int_{y_0}^R (y - y_0)^2 \cdot b(y) \cdot dy = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot I_{\Delta c}$$



⁴ Voir Annexes A et B

Armatures comprimées	Armatures tendues
$S_{sc} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s$ pour $d_i < y_1$	$S_{st} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s$ pour $d_i > y_1$
$\mu_{\Delta sc} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s \cdot (y_1 - d_i)$ pour $d_i < y_1$	$\mu_{\Delta st} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s \cdot (y_1 - d_i)$ pour $d_i > y_1$
$I_{\Delta sc} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s \cdot (y_1 - d_i)^2$ pour $d_i < y_1$	$I_{\Delta st} = \sum_i n_{eq} \cdot A_s \cdot (y_1 - d_i)^2$ pour $d_i > y_1$

Effort repris par les armatures comprimées :

$$F_{sc} = \sum_i A_s \cdot \sigma_i = \sum_i \frac{A_s \cdot n_{eq} \cdot M}{I_{\Delta}} \cdot (y_1 - d_i) = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot \mu_{\Delta sc} \text{ pour } d_i < y_1$$

Moment repris par les armatures comprimées :

$$M_{sc} = \sum_i A_s \cdot (y_1 - d_i) \cdot \sigma_i = A_s \cdot \sum_i \frac{nM}{I_{\Delta}} \cdot (y_1 - d_i)^2 = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot I_{\Delta sc} \text{ pour } d_i < y_1$$

Effort repris par les armatures tendues :

$$F_{st} = \sum_i A_s \cdot \sigma_i = \sum_i \frac{A_s \cdot n_{eq} \cdot M}{I_{\Delta}} \cdot (y_1 - d_i) = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot \mu_{\Delta st} \text{ pour } d_i > y_1$$

Moment repris par les armatures tendues :

$$M_{st} = \sum_i A_s \cdot (y_1 - d_i) \cdot \sigma_i = A_s \cdot \sum_i \frac{nM}{I_{\Delta}} \cdot (y_1 - d_i)^2 = \frac{M}{I_{\Delta}} \cdot I_{\Delta st} \text{ pour } d_i > y_1$$

Distance de la résultante de compression (béton+armatures comprimée) à l'axe neutre Δ :

$$y_c = \frac{M_c + M_{sc}}{F_c + F_{sc}}$$

Distance de la résultante de traction des armatures tendues à l'axe neutre Δ : $y_t = \frac{M_{st}}{F_{st}}$

Bras de levier : $z = y_c + y_t$

On retrouve la même valeur du bras de levier par la formule classique de la Résistance des Matériaux :

$$z = \frac{I_{\Delta}}{m_{\Delta}} \text{ avec } \mu_{\Delta} = \mu_{\Delta c} + \mu_{\Delta sc} = -\mu_{\Delta st}$$

Détermination de l'axe neutre

L'axe neutre est la droite Δ où les contraintes normales sont nulles. Ce qui s'exprime par l'équation $\mu_{\Delta c} + \mu_{\Delta sc} + \mu_{\Delta st} = 0$ à une inconnue α .

Démonstration de $z = I_{\Delta} / \mu_{\Delta c}$

Soit F_c la résultante de compression : $F_c = \int_0^v b(y) \cdot \sigma(y) \cdot dy = \frac{M}{I_{\Delta}} \int_0^v b(y) \cdot y \cdot dy = \frac{M \cdot \mu_{\Delta c}}{I_{\Delta}}$ car $\sigma(y) = \frac{M \cdot y}{I_{\Delta}}$

De même pour la résultante de traction : $F_t = \int_0^{v'} b(y) \cdot \sigma(y) \cdot dy = \frac{M \cdot \mu_{\Delta t}}{I_{\Delta}}$ et

$$M_c = \int_0^v b(y) \cdot y \cdot \sigma(y) \cdot dy = \frac{M}{I_{\Delta}} \int_0^v b(y) \cdot y^2 \cdot dy = \frac{M \cdot I_{\Delta c}}{I_{\Delta}} \text{ et } M_t = \int_0^{v'} b(y) \cdot y \cdot \sigma(y) \cdot dy = \frac{M \cdot I_{\Delta t}}{I_{\Delta}}$$

D'où la distance entre la résultante de compression et la résultante de traction :

$$z = \frac{M_c}{F_c} - \frac{M_t}{F_t} = \frac{I_{\Delta c}}{\mu_{\Delta c}} - \frac{I_{\Delta t}}{\mu_{\Delta c}} = \frac{I_{\Delta c} + I_{\Delta t}}{\mu_{\Delta c}} = \frac{I_{\Delta}}{\mu_{\Delta c}} \text{ car } \mu_{\Delta c} + \mu_{\Delta t} = 0 \text{ par définition du centre de gravité pris comme origine des coordonnées.}$$

ANNEXE D

SECTION CIRCULAIRE EN BÉTON ARMÉ EXEMPLES AVEC DIFFÉRENTS EFFORTS NORMAUX

Calculs exécutés (programme n° 140) par application de la formule :

$$\tau(y) = \frac{dF(y, x)}{b(y).dx} = \frac{y}{b(y).dx} \int^R b(\eta) \cdot [\sigma(\eta, x + dx) - \sigma(\eta, x)] d\eta$$

D = 0,8 m diamètre du pieu
V = 1 MN effort tranchant
M = 0,2 MNm moment de flexion

$v_{FD} = V / (0,6D \times 0,9d) = 3,21$ MPa cisaillement FD P18-717
 $v_{RdM} = 4V / (3\pi \cdot R^2) = 2,65$ MPa en Résistance des matériaux section homogène

Pour un même schéma, deux types de ferrailage de même section : 6HA40 et 24HA20, soit 1,5 % de la section

Schéma N°	N (MN)	Armatures	$V_{Ed,max}$ (MPa)	$\tau_{Rd,max}$ (MPa) Ed. (6.9)	y fibre neutre (m)	Section
1-1bis	-1,8	6HA40/24HA20	2,84/2,52	0	-0,061	ET
2-2bis	-0,9	6HA40/24HA20	3,11/2,92	1,40	0,103	PT
3-3bis	0	6HA40/24HA20	2,66/2,76	2,52	0,227	PT
4-4bis	1	6HA40/24HA20	3,34/3,32	5,04	0,531	PT
5-5bis	2	6HA40/24HA20	2,66/2,64	5,57	0,783	PT
6-6bis	3	6HA40/24HA20	2,65/2,64	5,62	0,941	EC

ET = entièrement tendu, PT = partiellement tendu, EC= entièrement comprimé

Constat :

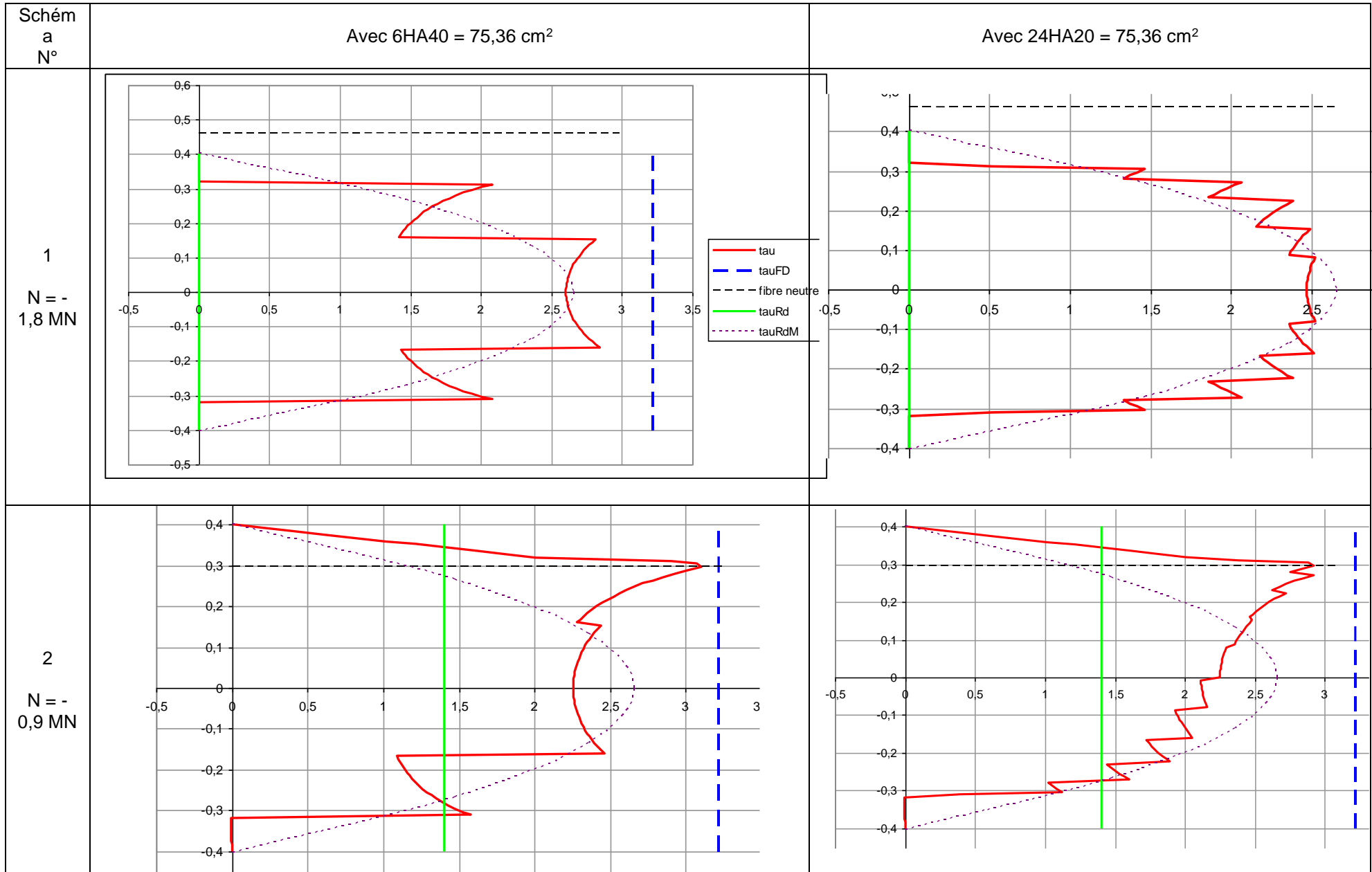
- le fait d'avoir un faible nombre de barres (6 minimum) n'a que peu d'influence sur la contrainte de cisaillement maximale sauf pour les cas d'effort normal de traction (Schémas 1 et 2)
- les courbes réelles (en rouge ci-après) ne sont pas très éloignées de la parabole déduite de la

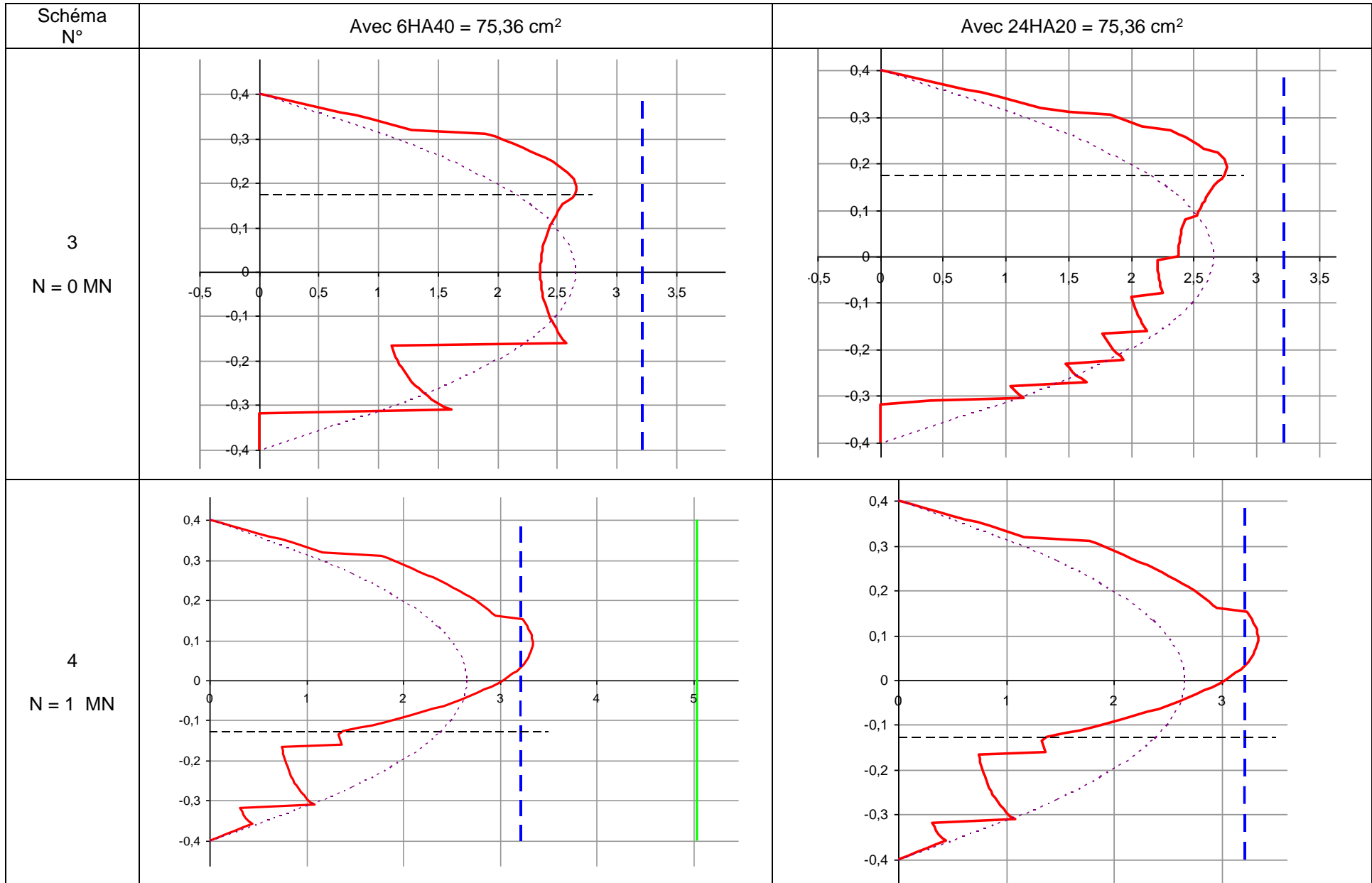
$$\text{Résistance des matériaux avec } \tau_{max} = \frac{4V}{3\pi R^2} .$$

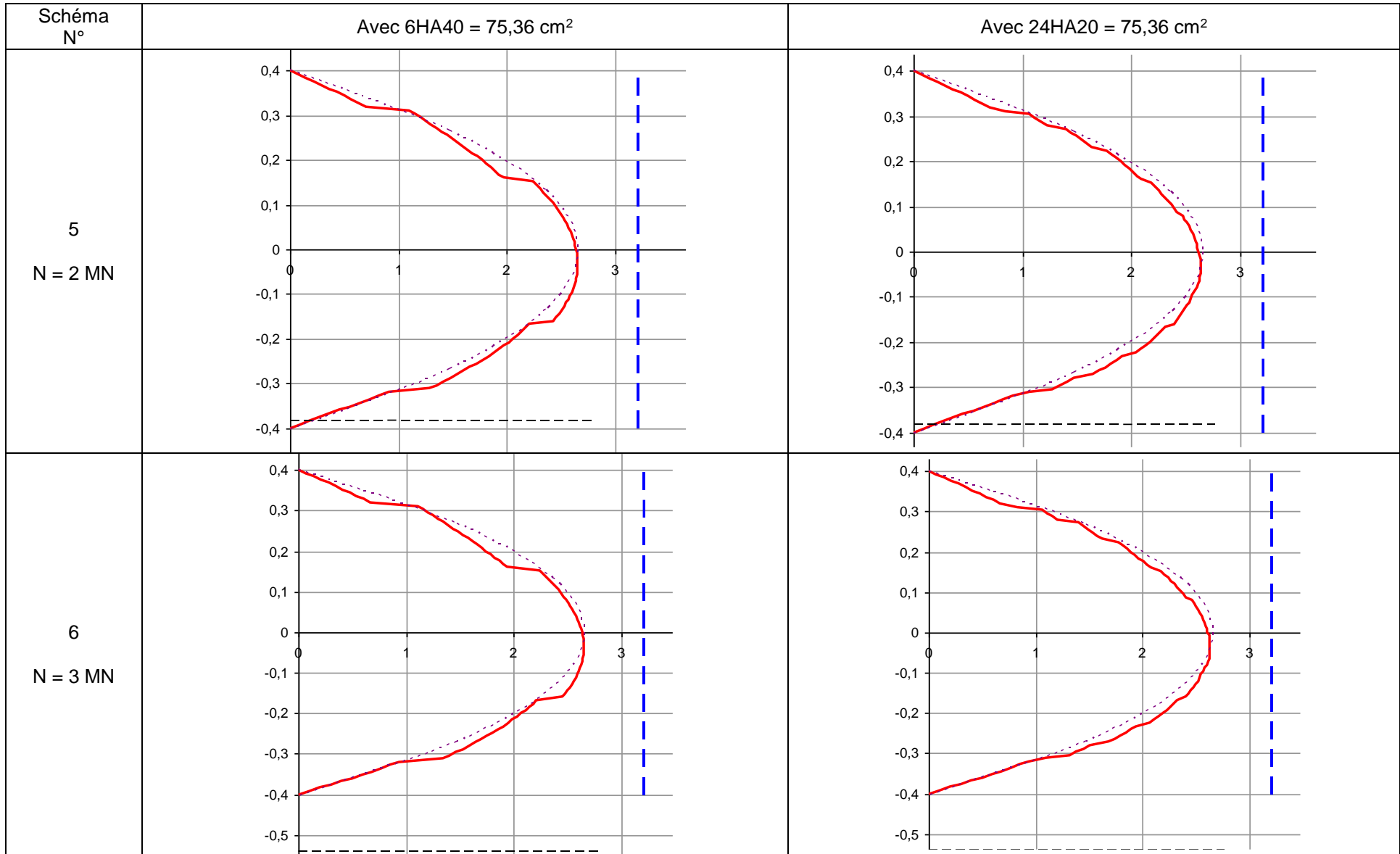
- le cisaillement maximal n'est pas obligatoirement au droit de la fibre neutre du fait des variations rapides de largeur b de la section
- le cisaillement calculé suivant le Guide d'application de l'Eurocode 3 FD P 18-717 peut être quelquefois insécuritaire.

Légende.

- la droite horizontale en pointillé noir représente la fibre neutre (points de contraintes normales nulles)
- la parabole en pointillé noir est celle du cisaillement d'une section homogène d'un matériau à comportement linéaire non fissuré (formule classique de la résistance des matériaux)
- la droite en pointillé bleu est la valeur du cisaillement calculé suivant le Guide d'application de l'Eurocode 2 : FD P18-717.
- la barre verticale verte représente la valeur de $\tau_{Rd,max}$ de l'EC2 qui est très pénalisante pour les cas d'efforts normaux de traction.







ANNEXE E

PROGRAMME N° 140 – CAS DE SECTION PARTIELLEMENT TENDUE

140 - Cisaillement de section béton armé circulaire en flexion simple ou composée entièrement comprimée, partiellement tendue ou entièrement tendue
(diagramme béton parabole-rectangle, Sargin ou linéaire)

H. Thonier
20 novembre 2017
L'auteur n'est pas responsable de l'utilisation faite de ce programme

Données

D 0,8 m

OK section partiellement tendue

diamètre poteau ou pieu

Diagramme béton

1 - parabole-rectangle

2 - Sargin - Eq. 3.14

3 - Linéaire

type 1 diagramme béton parabole-rectangle

Sollicitations ELU

N_{Ed} 1 MN
M_{Ed} 0,2 MNm
V_{Ed} 0,7 MN
cotθ 0

effort normal centré sur la section
moment fléchissant
effort tranchant
inclinaison des bielles si imposée

si diagr.linéaire
type = 3

η	15	= E _s /E _c
E _c	31	GPa
ε _{max}	0,5376	‰

Béton

f_{ck} 25 MPa
γ_C 1,5
f_{cd} 16,67 MPa
k 3,418
E_{cm} 31 GPa
ε_{c1} 2,1 ‰
ε_{cu1} 3,5 ‰
ε_{c2} 2 ‰
ε_{cu2} 3,5 ‰
n 2
f_{ctm} 2,6 MPa
A_c 0,50265 m²

résistance du béton
coefficient béton
résistance de calcul = f_{ck}/γ_C
coefficient de l'Eq. 3.14
module d'Young instantané
raccourcissement au sommet (Sargin)
raccourcissement limite (Sargin)
raccourcissement au sommet (P-R)
raccourcissement limite (P-R)
exposant de la parabole
résistance moyenne à la traction Tab.
section brute de béton = π.D²/4

Acier

f_{yk} 500 MPa
γ_S 1,15
B
f_{yd} 434,8 MPa
k 1,08
ε_{uk} 50 ‰
A_s 0,0001131 m²
ΣA_s 6,79 cm²
ρ_s 0,14% %
ρ_{s,min} 0,10% %
d 0,677 m
δ 0,640 m
ε_{s,max} 0,336 ‰
ε_{s,min} -0,163 ‰
σ_{s,max} 67,3 MPa
σ_{s,min} -32,7 MPa

limite élastique de l'acier
coefficient acier
classe acier
contrainte de calcul = f_{yk}/γ_S
coefficient de ductilité
allongement ultime
aire d'une armature
aire totale des armatures = A_c/A_s = % d'armatures
% minimal Eq. (9.12N)
hauteur utile maxi 84,6% de D
diamètre des cerces = D - 2u
raccourciss. maxi. en haut
allong. maxi en bas
contr. de compr. maxi
contr. traction maxi

Armatures longitudinales

n_a 6
Ø 12 mm
u 0,08 m
deca 1
k_{sc} 1 prise en compte des armatures comprimées=1, sinon 0

nombre de barres
diamètre des armatures
enrobage à l'axe
décalage d'un demi-angle =1, sinon =0

Armatures transversales

Ø 16 mm
s_t 0,09 m

diamètre des cerces
espacement des cerces

Béton

σ _{cp}	1,989	MPa	= N _{Ed} /A _c
σ _{cp} /f _{cd}	0,119		
α _{cw}	1,119		§ 6.2.3 (3) - Eq. (6.11)
σ _{c,max}	6,62	MPa	
σ _{c,fi} sup	6,62	MPa	
σ _{c,fi} inf	0,00	MPa	

Résultats

y 0,496 m
ε_{c,h} 0,447 ‰
ε_{c,b} -0,274 ‰
τ_{Ed,max} 2,918 MPa
b_w 0,746 m
V_{Ed,FD} 2,393 MPa
τ_{Ed,RdM} 1,857 MPa
V_{Ed,recalc} 0,69503 MN

hauteur de béton comprimé en ELU
déformation en haut
déformation en bas
cisaillement maximal par la méthode dF/(b.dx)
largeur au niveau du τ_{Ed,max} à la profondeur 0,256 m
= V_{Ed} / (0,6D×0,9d) cisaillement FD P18-717
= 4V/(3π.R²) en Résistance des matériaux section homogène
= V_{Ed} ? On retrouve l'effort tranchant imposé OK à 0,8 % près

Armatures d'effort tranchant

	béton	aciers	total	
F ₁	0,9877	0,0191	1,0069	ΣF _i au-dessus de l'axe neutre (PT) ou du centre de gravité (EC ou ET) PT = partiellement tendue
F ₂	0,0000	-0,0074	-0,0074	ΣF _i au-dessous de l'axe neutre (PT) ou du centre de gravité (EC ou ET) EC = entièrement comprimée
M ₁	0,2883	0,0061	0,2943	ΣM _i au-dessus de l'axe neutre (PT) ou du centre de gravité (EC ou ET) ET = entièrement tendue
M ₂	0,0000	0,0013	0,0013	ΣM _i au-dessous de l'axe neutre (PT) ou du centre de gravité (EC ou ET)
z ₁	0,2918	0,3164	0,2923	= M ₁ /F ₁
z ₂	0,0000	-0,1812	-0,1812	= M ₂ /F ₂
z	0,2918	0,4976	0,4735	= z ₁ - z ₂
z/D	36,5%	62,2%	59,2%	= z/D
z/d	43,1%	73,5%	69,9%	= z/d

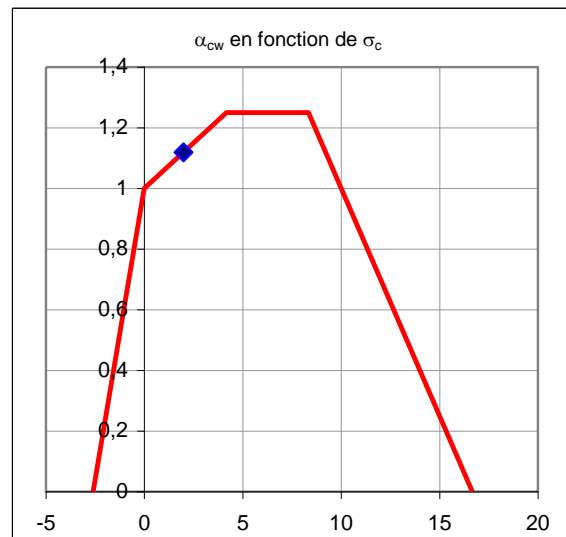
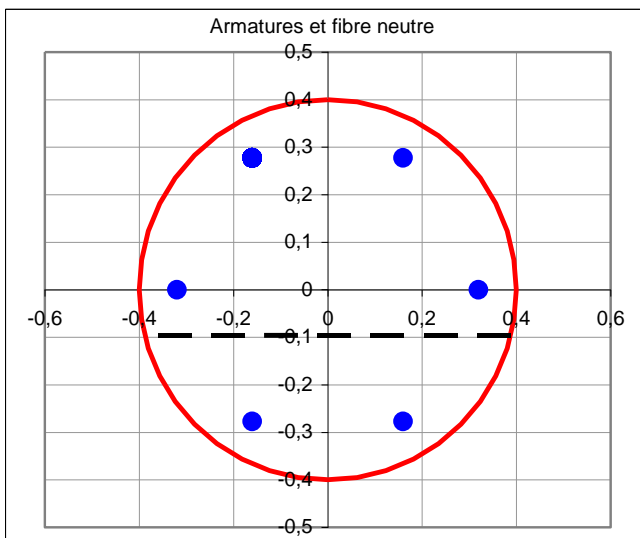
z ₁	0,609	m	bras de levier en flexion simple = 0,9d EC2 : § 6.2.3 (1) (non-réaliste pour des armatures réparties)
z	0,474	m	bras de levier en flexion simple ou composée part. tendue = z _c + z ₁ 70 % de d et 59 % de D
tan(2θ)	2,93343		= 2τ _{Ed,max} / σ _{cp}
2θ	1,24225	rd	
θ	0,62113	rd	angle calculé
θ	0,6211	rd	retenu avec cotθ compris entre 1 et 2,5
cotθ	1,397		retenu avec cotθ compris entre 1 et 2,5 soit θ = 35,6°
sinθ	0,58195		
cosθ	0,81322		
(A _{sw} /s) _{reqd}	24,33	cm ² /m	armatures nécessaires = V _{Ed} / (z · cotθ · f _{yd}) EC2 : Eq. (6.8) avec le z retenu
(A _{sw} /s) _{min}	3,84	cm ² /m	armatures minimales = 0,08(f _{ck}) ^{0,5} · b _w / f _{yk} avec b _w = 0,6D (FDP18-717 § 6.2.1)
(A _{sw} /s) _{prov}	44,68	m ² /m	: 2π · Ø _t ² / 4 / s _t
	OK	54%	vérification de la section des cerces

Vérification béton suivant EC2 : 6.2.3 (3) - Eq. (6.9)

V _{Rd,max}	4,77	MPa	= 0,6α _{cw} · (1 - f _{ck} /250) / (cotθ + tanθ) (Eq. 6.9)
V _{Ed,max} / V _{Rd,max}	OK	61%	vérification de la résistance à l'effort tranchant

Méthode plus élaborée de vérification de la compression des bielles

F _b	1,203	MN	effort de compression dans la bielle = V _{Ed} / sin(θ)
σ _b	4,23	MPa	contrainte de compression dans la bielle = F _b / S _b Voir détail à droite -->
σ _{Rdmax}	9,00	MPa	limite compression bielle = 0,6(1 - f _{ck} /250) · f _{cd} (Eq.6.56)
σ _b / σ _{Rdmax}	OK	47%	vérification de la bielle

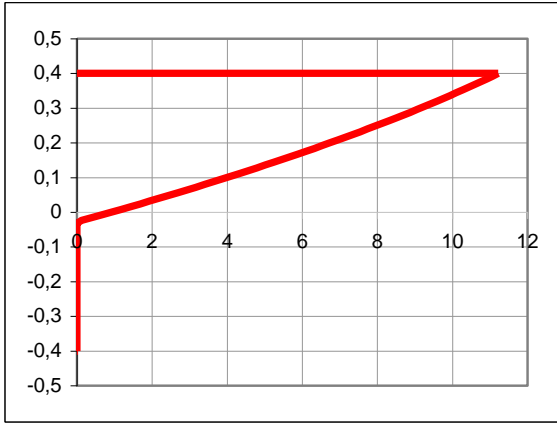


Calcul de z	béton	aciens	béton+aciens	
F_1	1,1520	0,1258	1,2778	ΣF_i au-dessus de l'axe neutre
F_2		-0,2790	-0,2790	ΣF_i au-dessous de l'axe neutre
M_1	0,2093	0,0248	0,2341	ΣM_i au-dessus de l'axe neutre
M_2		0,0855	0,0855	ΣM_i au-dessous de l'axe neutre
z_1	0,182	0,197	0,183	$= M_1/F_1$
z_2		-0,306	-0,306	$= M_2/F_2$
z	0,182	0,504	0,490	$= z_1 - z_2$
z/D	22,7%	62,9%	61,2%	$= z/D$
z/d	26,8%	74,4%	72,3%	$= z/d$

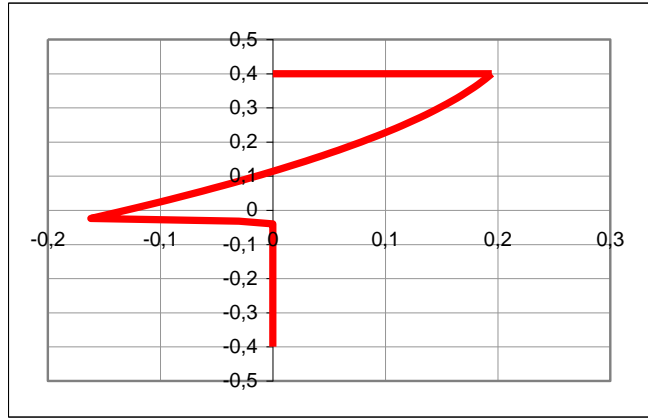
Contrainte dans les bielles inclinées

		1-2	3-4	
$0,2632297 : z_c + D/2 - y$		0,263	0,114	$y_3 = y_1 - z(1 - \cos^2\theta)$
$\beta = z \cdot \cos\theta$		0,408	0,408	$\beta = z \cdot \cos\theta$
$\beta \cdot \cos\theta$		0,341	0,341	$\beta \cdot \cos\theta$
$y_2 = y_1 - \beta \cdot \cos\theta$		-0,077	-0,226	$y_4 = y_3 - \beta \cdot \cos\theta$
$r_1 = (0,25D^2 - y_1^2)^{0,5}$		0,301	0,383	$r_3 = (0,25D^2 - y_3^2)^{0,5}$
$r_2 = (0,25D^2 - y_2^2)^{0,5}$		0,392	0,330	$r_4 = (0,25D^2 - y_4^2)^{0,5}$
$\tan\alpha_1 = r_1/y_1$		1,144	3,360	$\tan\alpha_3 = r_3/y_3$
$\tan\alpha_2 = r_2/y_2$		-5,078	-1,457	$\tan\alpha_4 = r_4/y_4$
48,8	α_1	0,853	1,281	α_3 73,4
101,1	α_2	1,765	2,172	α_4 124,5
	A_1	0,0571	0,1613	A_3
	A_2	0,3128	0,4222	A_4
	A_{1-2}	0,2556	0,2610	A_{3-4}
$F_b = V_{Ed}/\sin\theta$		1,268	1,268	F_b
$\sigma_{b1} = F_b/A_{1-2} \cdot \cos\theta$		4,14	4,05	$\sigma_{b3} = F_b/A_{3-4}$
	σ_b	4,14		

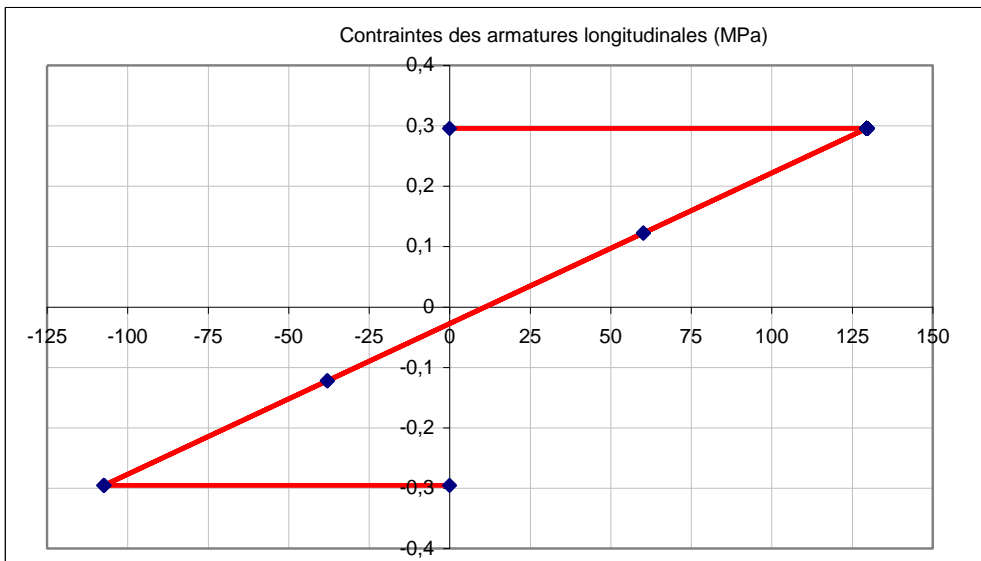
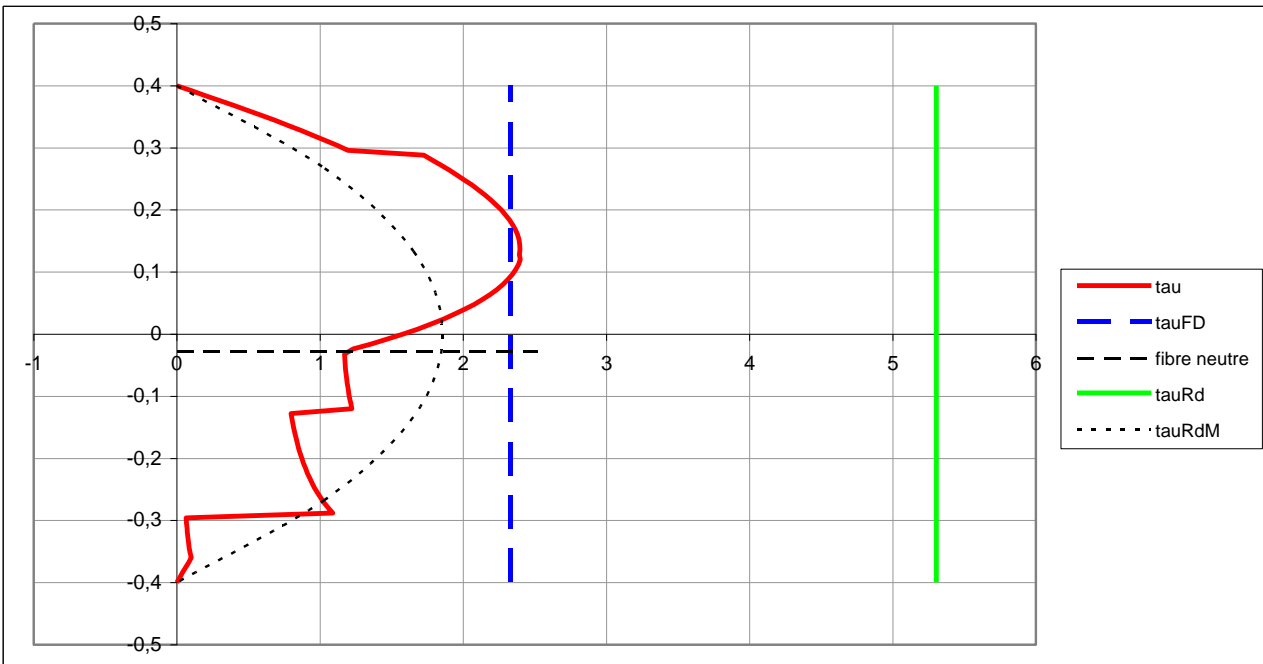
Contraintes de compression du béton σ



Différences de contraintes de compression $d\sigma$



**Contraintes de cisaillement τ ; cisaillement du FD P18-717 $\tau_{FD} = V_{Ed}/(0,6D.d)$
 cisaillement résistant EC2 $\tau_{Rd} = \alpha_{cw} \cdot V_1 \cdot f_{cd}$; $\tau_{RdM} = (4/3) \cdot V / (\pi \cdot R^2)$**



ANNEXE F

EFFORT TRANCHANT ET CISAILLEMENT DES SECTIONS RECTANGULAIRES

1 - Calcul du cisaillement

Ecrivons l'équilibre de la partie située au-dessus de la cote y (Fig. 1)

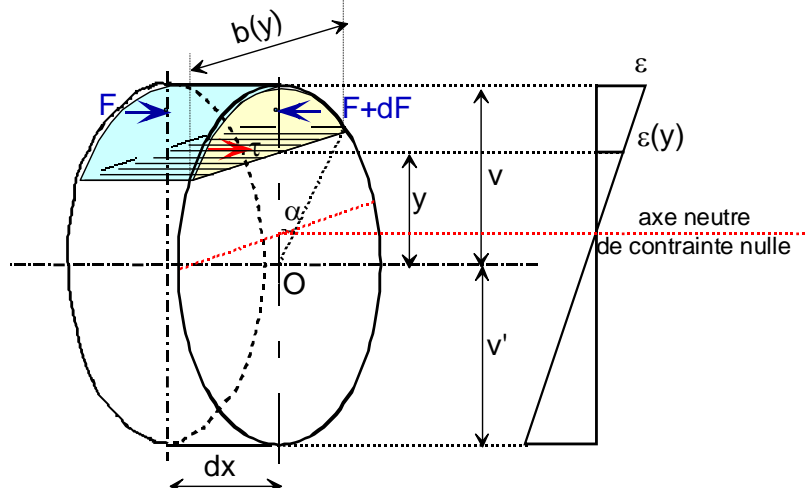


Fig. 1 – Equilibre de l'élément coloré

La méthode ci-dessous est valable quels que soient :

- la forme de la section de l'élément (rectangle, T, cercle, trapèze ; ...)
- le diagramme contrainte-déformation (linéaire, parabole-rectangle, Sargin de l'Eq. 3.14 de l'EC2, ...)
- la résistance ou non du matériau à la traction.

Au niveau de l'axe neutre, comme il n'y a plus de béton résistant en-dessous, le cisaillement sera constant jusqu'aux premières armatures rencontrées à partir desquelles, le cisaillement diminuera pour devenir nul en bas de la section. Le cisaillement maximum est obtenu au niveau de l'axe neutre.

A ce niveau, on a : $\tau \cdot b \cdot dx = dF(x)$. Or, $F(x)$ est fonction de $M(x)$ par la relation $F(x) = \frac{M(x)}{z}$ où z représente le bras de levier du couple des efforts normaux de compression (au-dessus de l'axe neutre) et en dessous de cet axe.

En admettant que z est constant sur la distance dx en négligeant les différentielles de 2^e ordre, on obtient en

$$\text{dérivant : } \frac{dF(x)}{dx} = \frac{dM(x)}{z \cdot dx} = \frac{V(x)}{z} \text{ d'où : } \tau_{\max} = \frac{V}{b \cdot z}$$

2 – Recherche de l'effort tranchant maximal

L'effort tranchant de calcul est déterminé à une distance d des nus des appuis (Fig. 2)

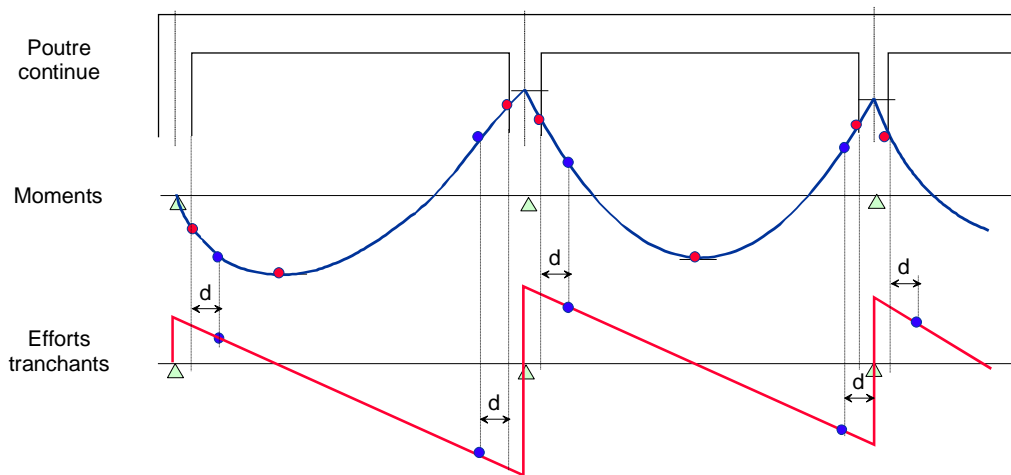


Fig. 2 – Courbes des moments et efforts tranchants d'une poutre continue

On constate que l'effort tranchant maximal (points bleus) n'a pas lieu au même endroit que le moment maximal (points rouges). Il en résulte, que même si la section de moment maximal a été étudiée en faisant travailler les matériaux béton et acier au maximum de leurs capacités, le diagramme contrainte-déformation du béton est incomplet (parabole-rectangle).

Par exemple pour un diagramme parabole-rectangle (P-R), le bras de levier est compris dans les limites :

$$0 < x < \frac{3,5}{3,5 + \frac{500}{1,15 \times 200}} = 0,617 \text{ soit } d - \frac{x}{3} < z < d - \frac{99x}{238} = d - 0,416x \text{ ou encore } 0,743d < z < d.$$

Les valeurs courantes étant voisines de la valeur moyenne 0,87d, l'EC2 a retenu une valeur forfaitaire $z = 0,9d$. On peut toujours prendre la valeur calculée si elle est plus favorable.

Influence sur le cisaillement et la résistance de la bielle due à des moments de flexion voisins du moment résistant de la section

Prenons l'exemple d'un effort normal de traction $N_{Ed} = -1,5 \text{ MN}$ appliqué à un poteau (ou pieu) armé longitudinalement de différentes sections d'armatures. On obtient les cisaillements du tableau ci-dessous :

		24HA16	6HA32	8HA32	6HA40	8HA40
Section d'armatures	cm ²	48,24	48,24	64,32	75,36	100,48
$\tau_{Ed,max}$	MPa	9,18	12,04	1,87	2,13	1,86
$\varepsilon_{c,max}$	‰	1,61	2,21	0,05	0,04	0,03
$\varepsilon_{c,max}$	‰	-12,52	-16,01	-2,38	-2,03	-1,32
y	m	0,082	0,082	0,015	0,015	0,016

On constate que pour des sections d'armatures voisines de la limite nécessaire en flexion composée, les cisaillements calculés deviennent très importants. En général, ces cas ne devraient pas se produire, car comme on l'a vu ci-dessus, les points de d'efforts tranchants maximaux ne sont pas les mêmes que ceux de moments maximaux.

3 - Inclinaison des bielles

Pourquoi l'angle d'inclinaison des bielles est-il laissé au libre choix du projeteur, sans qu'il ait à se justifier comme indiqué à l'art. 6.2.3 (2) de l'EC2 ?

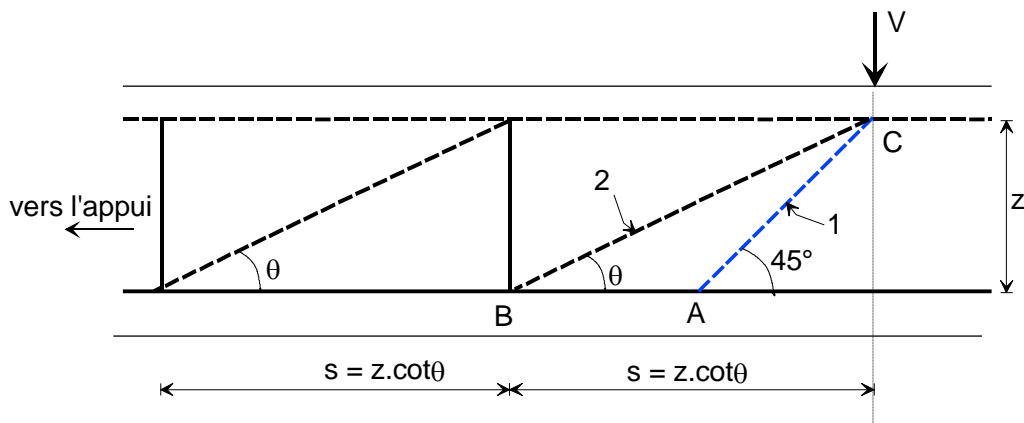


Fig. 3 – Inclinaison des bielles d'un angle θ

Considérons le cas d'une charge concentrée V (ou d'un effort tranchant) appliqué en C. La transmission de cet effort se fera par des bielles inclinées, dont les efforts seront à remonter en partie supérieures pour rechercher une nouvelle bielle inclinée, etc.

Si l'on choisit a priori des espacements des cadres supérieurs à z (Fig. 3), la bielle à 45° issue de C arrivant en partie inférieure en A aura la composante horizontale de son effort de compression qui pourra être équilibré par les armatures longitudinales inférieures, mais la composante verticale de cette compression ne pourra pas être équilibré par des cadres qui n'existeront pas en A.

Par contre la bielle BC peut être équilibrée par les armatures longitudinales et par les cadres en B.

L'EC2 limite la plage⁵ de choix par la condition $1 \leq \cot \theta \leq 2,5$.

Plus $\cot \theta$ est élevé, plus on économise sur les armatures d'effort tranchant, mais on diminue la résistance à la compression de la bielle et on augmente le décalage des armatures longitudinales.

4 – Vérification de la compression des bielles

Considérons la bielle hachurée de la Fig. 4. Sa largeur dans le plan de la figure vaut $\beta = z \cdot \cos \theta$.

Sa section droite vaut : $S_b = b \cdot \beta = b \cdot z \cdot \cos \theta$.

L'effort de compression dans la bielle est égal à : $F_b = \frac{V}{\sin \theta}$

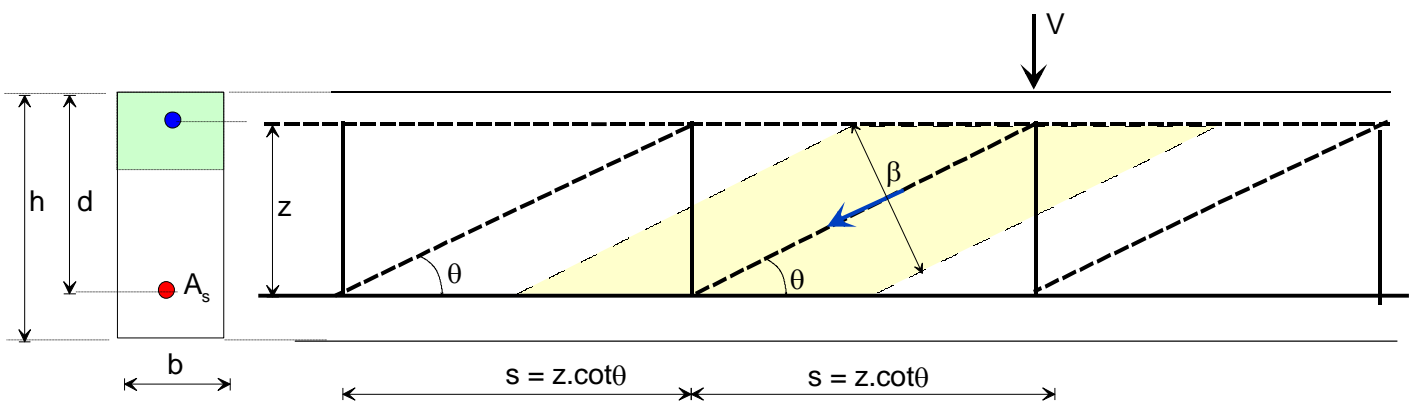


Fig. 4 – Compression des bielles

Et la contrainte de compression : $\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{V}{b \cdot z \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{V \cdot (\tan \theta + \cot \theta)}{b \cdot z}$ qui doit être inférieure à la limite

de compression des bielles traversées par des armatures tendues et donc soumises à des efforts de traction transversale (EC2 : Eq. (6.56) $\sigma_{Rd,max} = 0,6v' \cdot f_{cd}$.

⁵ A noter que le choix $0,4 \leq \cot \theta \leq 2,5$ avait été envisagé lors de l'écriture de l'EC2 et abandonné car conduisant à des quantités importantes de ferrailage transversal

On obtient la valeur limite $V_{Rd,max} = \frac{0,6v' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z}{\tan\theta + \cot\theta}$.

Pour tenir compte d'une augmentation (ou diminution pour des compressions élevées) de la résistance au cisaillement dans une section comprimée, l'EC2 a introduit dans l'Eq. (6.11) un facteur multiplicateur α_{cw} .

$$\begin{array}{ll} \alpha_{cw} = 1 + \sigma_{cp}/f_{cd} & \text{pour } 0 < \sigma_{cp} \leq 0,25 f_{cd} \\ \alpha_{cw} = 1,25 & \text{pour } 0,25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0,5 f_{cd} \\ \alpha_{cw} = 2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd}) & \text{pour } 0,5 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq f_{cd} \end{array}$$

ANNEXE G

ETUDE D'UN PIEU OU POTEAU CIRCULAIRE

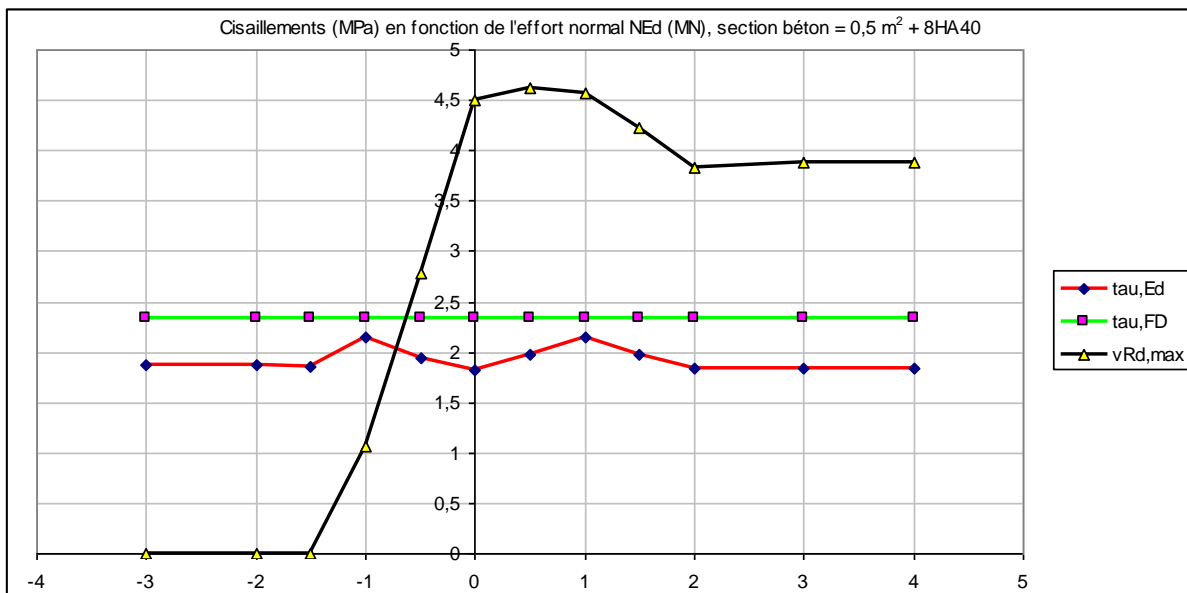
1 - Données.

diamètre 800 mm
distance du centre des barres à la paroi : 80 mm
béton $f_{ck} = 25$ MPa et diagramme parabole-rectangle
effort tranchant $V_{Ed} = 0,7$ MN
moment de flexion $M_{Ed} = 0,2$ MNm
effort normal N_{Ed} variant de -6 MPa à 8 MPa

2 - Etude du cisaillement en fonction de l'effort normal

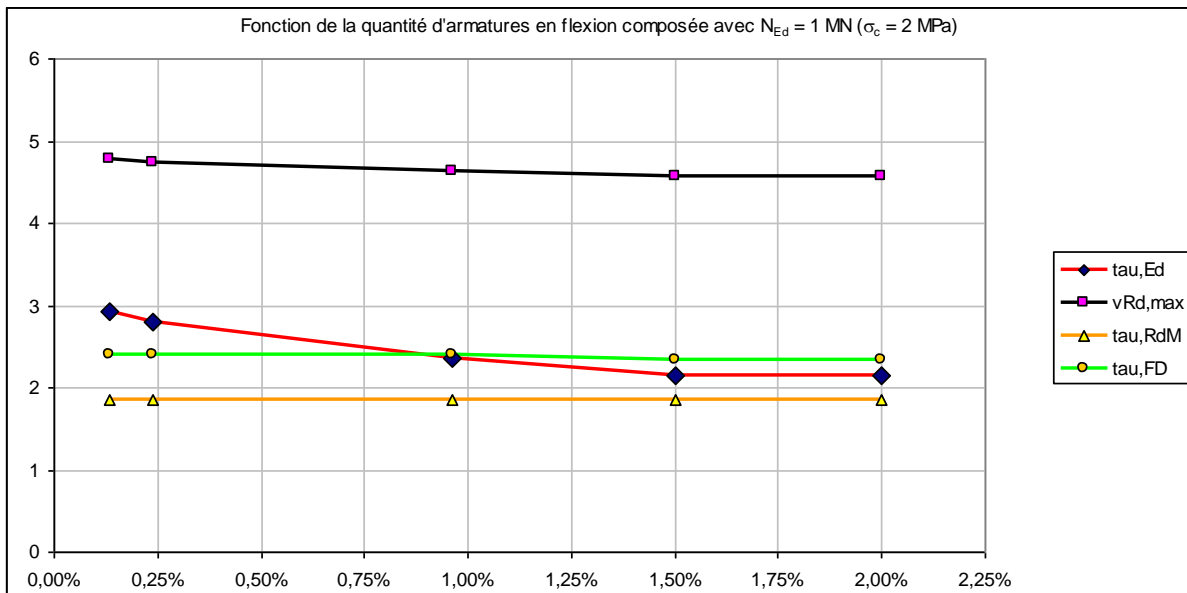
Le cisaillement τ_{Ed} varie peu en fonction de l'effort de compression du béton N_{Ed} de -3 à 4 MN.
Il reste, dans ces exemples, au-dessous de la valeur limite τ_{FD} du Guide FD P18-717.

On constate que la limite $v_{Rd,max}$ de l'EC2 (Eq. 6.9 + Annexe nationale) est peu adaptée pour une section circulaire et pour les cas de flexion composée de traction.



3 - Influence de la quantité d'armatures longitudinales

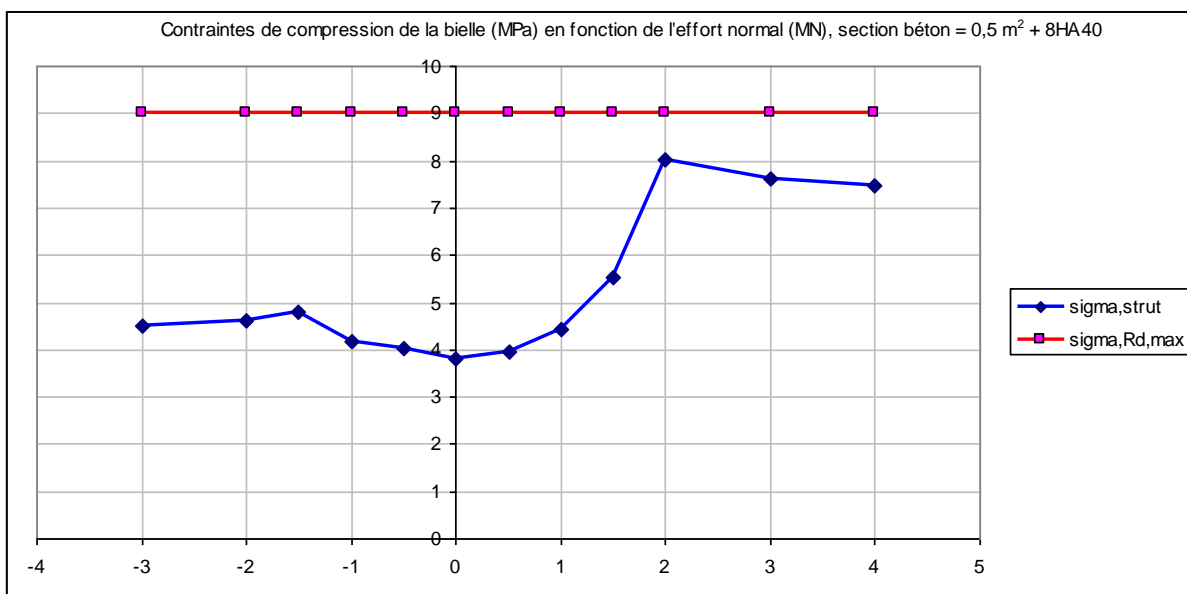
La diminution du cisaillement en fonction du pourcentage d'armatures principales est faible, mais cependant dans notre exemple, elle permet d'avoir un cisaillement inférieur au cisaillement du Guide pour un pourcentage supérieur à 0,9%.



4 - Contrainte dans la bielle inclinée

Une autre méthode de vérification de la résistance à l'effort tranchant est de calculer la contrainte de compression dans la bielle σ_{strut} et de la comparer avec la contrainte limite de l'article 6.5.2 (2) de l'EC2 :

$$v_{Rd,max} = 0,6(1-f_{ck}/250).f_{cd} \text{ soit } 9 \text{ MPa pour } f_{ck} = 25 \text{ MPa.}$$



On constate que la vérification est plus difficilement assurée pour les cas de section entièrement comprimée ($N_{Ed} \geq 2 \text{ MN}$).

5 - Remarques sur la valeur du bras de levier z en section entièrement tendue

Si l'on considère une répartition des armatures régulière sur le pourtour, on aura un bras de levier pas très éloigné de celle obtenue en section entièrement comprimée.

Dans le tableau ci-dessous, on voit comment varie z/d en fonction du nombre de barres et de la hauteur $d - D - u$, si u représente la distance de l'axe d'une barre à la paroi, soit z/d variant de 0,45 à 0,63.

Valeurs de z/D pour n barres

		u/D			
		0,05	0,1	0,15	0,2
nombre de barres	6	0,60	0,53	0,47	0,40
	8	0,54	0,48	0,42	0,36
	10	0,58	0,52	0,45	0,39
	12	0,56	0,50	0,44	0,37
	14	0,58	0,51	0,45	0,39
	16	0,57	0,50	0,44	0,38
	18	0,58	0,51	0,45	0,38
	20	0,57	0,51	0,44	0,38
	22	0,57	0,51	0,45	0,38
	24	0,57	0,51	0,44	0,38

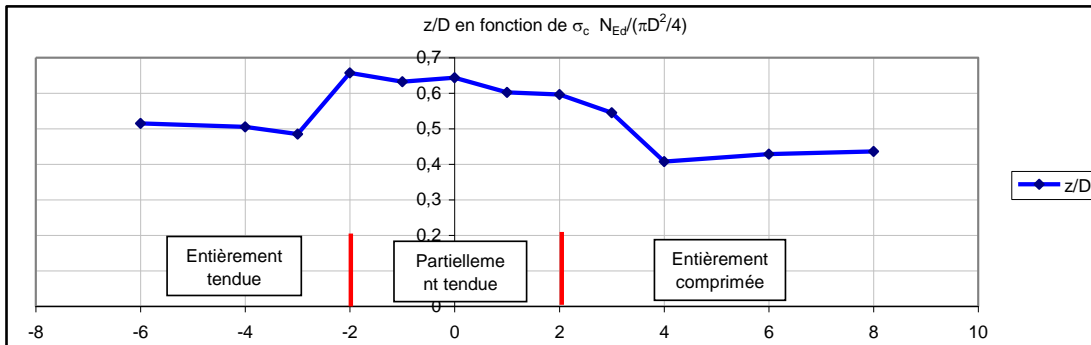
maxi : 0,6
mini : 0,36

Valeurs de z/d pour n barres avec d = D - u

		u/D			
		0,05	0,1	0,15	0,2
nombre de barres	6	0,63	0,59	0,55	0,50
	8	0,57	0,54	0,50	0,45
	10	0,61	0,58	0,53	0,49
	12	0,59	0,55	0,51	0,47
	14	0,61	0,57	0,53	0,48
	16	0,60	0,56	0,52	0,47
	18	0,61	0,57	0,53	0,48
	20	0,60	0,56	0,52	0,47
	22	0,61	0,57	0,53	0,48
	24	0,60	0,56	0,52	0,47

maxi : 0,63
mini : 0,45

6 - Remarques sur la valeur du bras de levier z en fonction de l'effort normal



σ_c (MPa)	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3	4
z (m)	0,412	0,404	0,388	0,526	0,506	0,515	0,482	0,477	0,436	0,326	0,343	0,349
z/D	0,515	0,505	0,485	0,658	0,633	0,644	0,603	0,596	0,545	0,408	0,429	0,436

Si l'on considère une répartition des armatures régulière sur le pourtour, on aura un bras de levier variant dans notre exemple de $(z/D)_{\max} = 0,66$ et $(z/D)_{\min} = 0,41$

ANNEXE H

SECTION EN BETON ARME FISSUREE A COMPORTEMENT NON ELASTIQUE

Le problème devient un peu plus complexe du fait que les diagrammes contrainte-déformation du béton et de l'acier ne sont pas linéaires élastiques.

On procède en négligeant le béton tendu dans le calcul des efforts normaux résistants $F(x,y)$. Le diagramme des contraintes du béton est une fraction du diagramme parabole-rectangle, en fonction du taux de sollicitation de la section.

Le programme N° 140 pour les sections circulaires utilise un pas de 100. Il détermine les déformées en fibre supérieure et inférieure, puis les contraintes à toute cote y , donc la différence d'effort entre deux sections voisines espacées de dx .

Pour cela, il balaye tous les cas de droites de déformations comprises dans les limites correspondant au cas section entièrement tendue à moment nul jusqu'au cas section entièrement comprimée à moment nul⁶.

(Voir Fig. 1)

La section peut être entièrement comprimée en flexion composée de compression (poteau, pieu), partiellement tendue (flexion simple ou composée) ou entièrement tendue en flexion composée de traction (tirant fléchi).

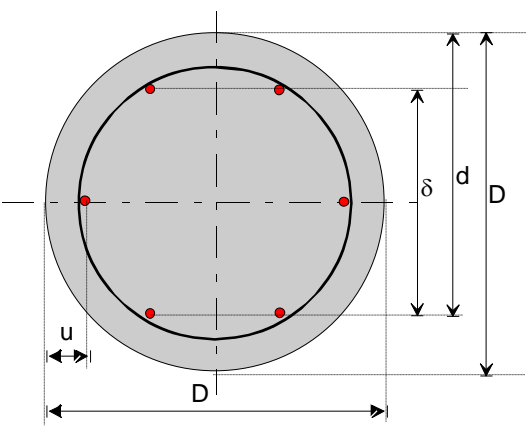



Coupe de la section droite d'un élément circulaire	section circulaire
	 PT : partiellement tendue
	 EC : entièrement comprimée
	 ET : entièrement tendue

Tableau 1 – Types de section

Pour des sections fortement sollicitées à la flexion, c'est-à-dire dont les armatures longitudinales sont juste suffisantes pour reprendre les moments et effort normal, le programme peut conduire à des cisaillements calculés très importants et non représentatifs de la réalité. Pour cela, il suffit d'augmenter le ferrailage longitudinal.

Exemple. La même section circulaire $D = 0,8$ avec $M = 0,2$ MNm, $V = 0,7$ MN, on obtient suivant le ferrailage adopté les cisaillements maximaux suivants :

(7)	Aire (cm ²)	Cisaillement τ (MPa)
6HA31,5	46,76	Section acier insuffisante
6HA32	48,25	12,04
24HA16	48,25	9,63
6HA32	48,25	12,04
6HA32,5	49,77	12,19

⁶ Un moment nul peut coexister avec un effort tranchant non nul. Exemple, aux points de moments nuls de la courbe des moments de flexion

⁷ Pour obtenir une progression régulière de la section d'acier, on utilise des diamètres fictifs

6HA33	51,32	3,69
6HA34	54,48	3,5
7HA32	56,30	7,52
8HA32	64,34	1,87
6HA40	75,40	2,13
8HA40	100,53	1,86
24HA25	117,81	1,73

On constate l'influence du nombre de barres et de leur diamètre.

Du fait que la largeur de la section varie en fonction de la cote du point étudié et que le comportement du béton à l'ELU est non élastique (parabole-rectangle), il est nécessaire de procéder par pas et d'intégrer selon Simpson.

Soient ϵ_h et ϵ_b les déformations du béton en fibre supérieure et en fibre inférieure (Fig. 1)

Posons : $\epsilon_n = \epsilon_n + \epsilon_m$
 $\epsilon_b = \epsilon_n - \epsilon_m$

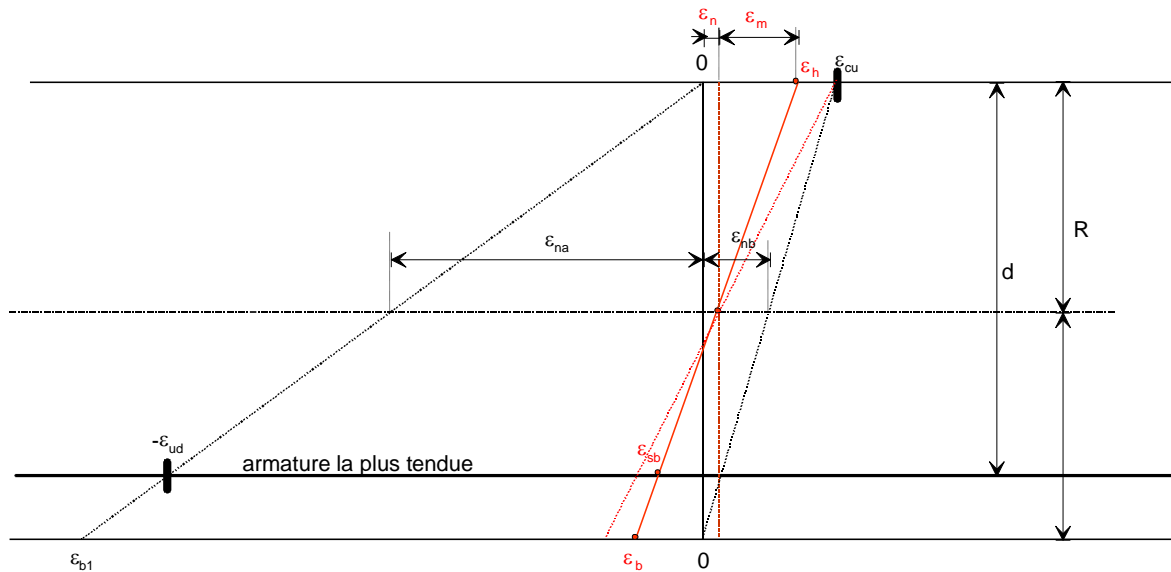


Fig. 1 – Section circulaire partiellement tendue – Limites des déformations

Plages de variations des déformations (Fig. 1) : $\epsilon_{na} \leq \epsilon_n \leq \epsilon_{nb}$
 $\epsilon_{ma} \leq \epsilon_m \leq \epsilon_{mb}$

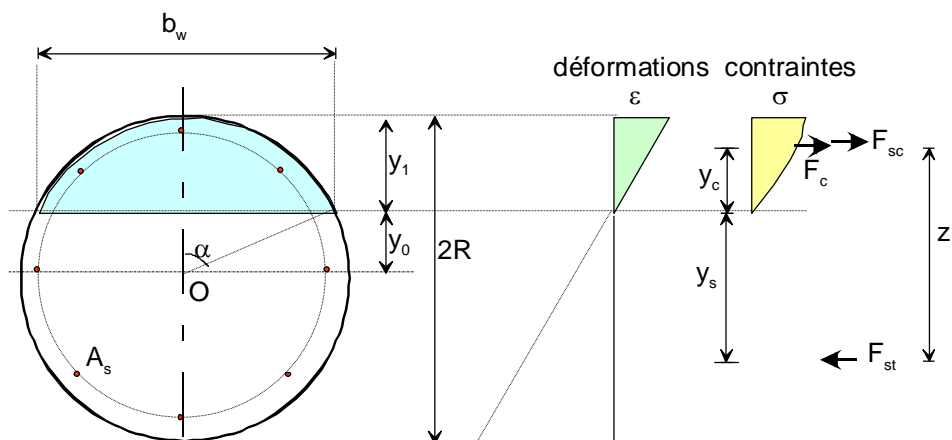


Fig. 11 – Section circulaire partiellement tendue – Déformations et contraintes

Quelle valeur prendre pour la « hauteur utile » d ?

Elle représente la distance entre la fibre comprimée et l'armature la plus éloignée.

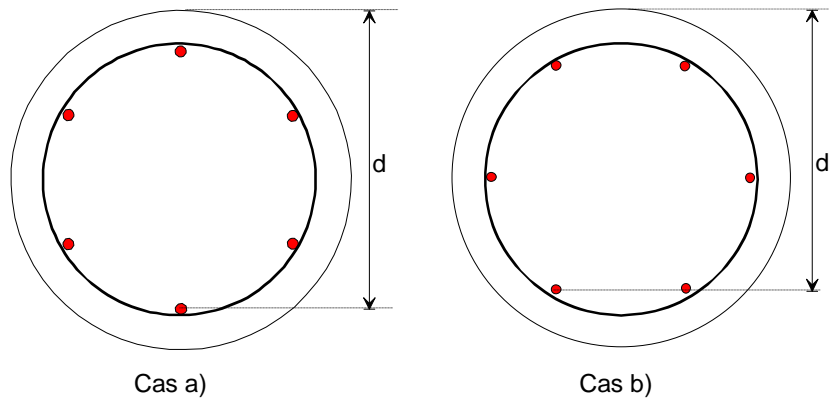


Fig. 3 – Détermination de la « hauteur utile » d

On doit retenir le cas le plus défavorable qui est représenté sur la Fig. 3b) qui donne une valeur plus faible.

Application numérique – Section circulaire partiellement tendue

Données

Pieu Ø800

Effort normal de compression : $N_{Ed} = 1,5 \text{ MN}$

Effort tranchant $V_{Ed} = 0,7 \text{ MN}$

Moment fléchissant $M_{Ed} = 0,4 \text{ MNm}$

Diagramme béton parabole-rectangle

Enrobage à l'axe des armatures longitudinales : 0,08 m pour 8HA25

L'équilibre est obtenu pour des déformations $\varepsilon_h = 0,857 \text{ ‰}$ en haut et $\varepsilon_b = -0,746 \text{ ‰}$ en bas. La section est partiellement tendue et la fibre neutre est à 0,428 m de la fibre supérieure.

Le cisaillement maximal vaut $\tau_{Ed,max} = 2,40 \text{ MPa}$ à 0,280 m au dessous de la fibre supérieure.

On retrouve bien l'effort tranchant de 0,7 MN à 1,3 % près en intégrant le produit $b(y) \cdot \tau(y)$ sur la hauteur de la section.

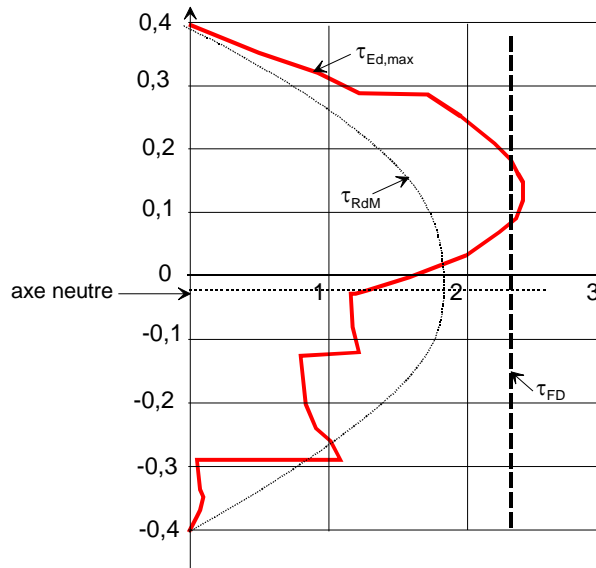


Fig. 4 – Cisaillement (MPa) en section partiellement tendue

On constate que dans cet exemple, le cisaillement calculé par la formule classique de la Résistance des

matériaux (parabole de Fig. 4) $\tau = \frac{4 V_{Ed}}{3 \pi R^2} = \frac{16 V_{Ed}}{3 \pi D^2}$ donne une courbe assez différente avec une contrainte

maximale nettement plus faible (1,86 MPa au lieu de 2,40 MPa).

Le cisaillement calculé par le FD P18-717 est voisin de la valeur calculée (2,33 au lieu de 2,40 MPa).

Inclinaison de la bielle

Pour économiser sur le poids des armatures transversales, on a intérêt à prendre la valeur maximale de $\cot\theta$.

Dans le cas de flexion composée de compression, on peut retenir une inclinaison de bielle telle que $\tan(2\theta) = \frac{2\tau}{\sigma}$

(formule déduite du cercle de Mohr et c'est ce que faisait d'ailleurs le BPEL) avec $\sigma = \frac{4N_{Ed}}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \times 1,5}{\pi \times 0,8^2} = 2,98$

MPa

$\tan(2\theta) = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 2,40}{2,98} = 1,608$ d'où $\theta = 0,507$ rd et $\cot\theta = 1,80 < 2,5$.

Bras de levier z

Soit z_c la distance au centre du point d'application de la résultante des efforts normaux (béton + armatures) situés au-dessus du centre et z_t la distance du point d'application de la résultante des efforts normaux (béton comprimé éventuel + armatures) situés au-dessous du centre.

Le bras de levier z est la distance entre ces deux résultantes. Il permet de déterminer la longueur horizontale (sur la figure 5) des bielles inclinées : $z \cdot \cot\theta$.

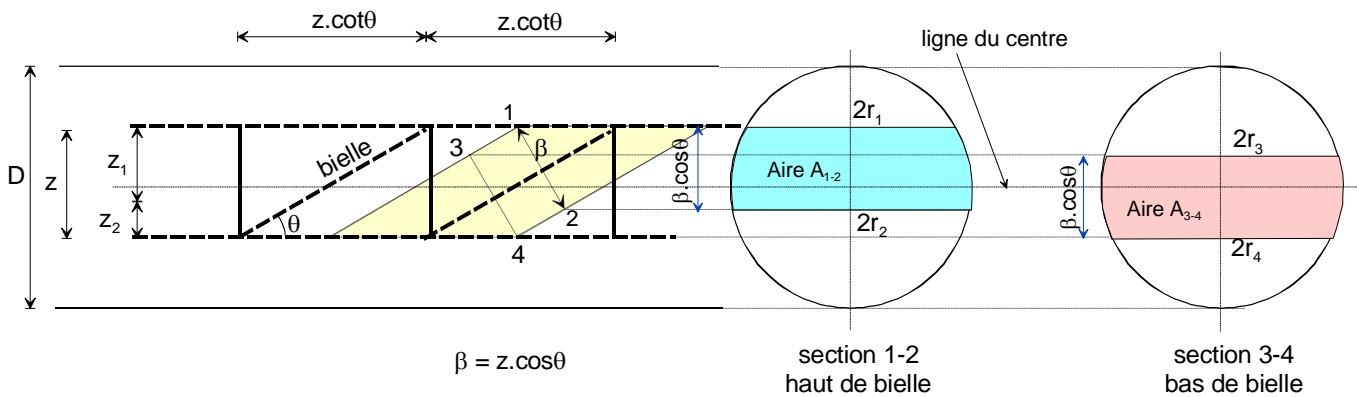


Fig. 5 – Inclinaison des bielles et bras de levier

Contrainte dans la bielle inclinée

Section dans le plan vertical de la bielle 1-2 (aire bleue) vaut par différence de surfaces de deux calottes :

$$A_{1-2} = R^2 \left[\alpha_2 - \alpha_1 - \frac{\sin(2\alpha_2) - \sin(2\alpha_1)}{2} \right]$$

$$\text{De même pour la bielle 3-4 (aire rose) : } A_{3-4} = R^2 \left[\alpha_4 - \alpha_3 - \frac{\sin(2\alpha_4) - \sin(2\alpha_3)}{2} \right]$$

La section droite minimale de la bielle (perpendiculairement à son axe) vaut $A_b = \frac{\text{Min}[A_{1-2}; A_{3-4}]}{\cos\theta}$ et la contrainte

maximale dans la bielle : $\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{V_{Ed}}{A_b \cdot \sin\theta}$ avec un effort de compression de la bielle : $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin\theta}$

Application numérique

Contrainte dans les bielles inclinées

Bielle	1-2	3-4	
y_0	0,000	0,000	y_0
$y_1 = z_c + y_0$	0,185	0,138	$y_3 = y_4 + \beta \cdot \cos\theta$
$\beta = z \cdot \cos\theta$	0,314	0,314	$\beta = z \cdot \cos\theta$
$\beta \cdot \cos\theta$	0,292	0,292	$\beta \cdot \cos\theta$
$y_2 = y_1 - \beta \cdot \cos\theta$	-0,107	-0,154	$y_4 = -z_t + y_0$
$r_1 = (0,25D^2 - y_1^2)^{0,5}$	0,355	0,375	$r_3 = (0,25D^2 - y_3^2)^{0,5}$

$r_2 = (0,25D^2 - y_2^2)^{0,5}$	0,385	0,369	$r_4 = (0,25D^2 - y_4^2)^{0,5}$
$\tan\alpha_1 = r_1/y_1$	1,919	2,717	$\tan\alpha_3 = r_3/y_3$
$\tan\alpha_2 = r_2/y_2$	-3,604	-2,404	$\tan\alpha_4 = r_4/y_4$
α_1	1,090	1,218	α_3
α_2	1,841	1,965	α_4
A_1	0,1089	0,1430	A_3
A_2	0,3359	0,3711	A_4
A_{1-2}	0,2270	0,2281	A_{3-4}
$F_b = V_{Ed}/\sin\theta$	1,885	1,885	F_b
$\sigma_{b1} = F_b/A_{1-2} \cdot \cos\theta$	7,71	7,67	$\sigma_{b3} = F_b/A_{3-4}$
σ_b	7,71		
$\sigma_{Rd,max}$	9,00		

$$\sigma_b = 85,7 \% \text{ de } \sigma_{Rd,max}$$

Vérification de la bielle

Si l'on applique la formule (6.9) de l'EC2, on trouve pour une contrainte moyenne de compression σ :

$$\frac{\sigma}{f_{cd}} = \frac{\sigma \cdot \gamma_C}{f_{ck}} = \frac{2,98 \times 1,5}{25} = 0,150 < 0,25 \rightarrow \alpha_{cw} = 1 + \frac{\sigma}{f_{cd}} = 1,18 \text{ d'après (6.11)}$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\tan\theta + \cot\theta) = 1,18 \times 0,6 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \cdot \frac{25}{1,5} \cdot \frac{1}{1,8 + 0,556} = 4,51 \text{ MPa}$$

On vérifie bien $\tau_{Ed,max} = 2,40 < V_{Rd,max} = 4,51 \text{ MPa OK} : \tau_{Ed,max} = 53 \% \text{ de } \tau_{Rd,max}$.

Remarque. Cette équation a été établie pour des largeurs d'âme constante, pas pour une section circulaire. Une façon plus élaborée est de vérifier que la contrainte dans la bielle inclinée ne dépasse pas la limite de l'art. 6.5.2 (2) de l'EC2.

On calcule ainsi :

- la section droite de la bielle perpendiculairement à l'axe du pieu : $S_1 = \pi \frac{D \cdot z}{4}$ (ellipse)
- la section droite perpendiculaire à son inclinaison θ : $S_b = S_1 \cdot \cos\theta$
- l'effort de compression dans la bielle qui vaut $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin\theta}$
- la contrainte de compression de la bielle : $\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} < 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times \frac{f_{ck}}{\gamma_C}$

Valeur de la « hauteur utile » d :

- si n_a , le nombre de barres est paire : $d = \frac{D}{2} - \left(\frac{D}{2} - u\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (n_a + 1)}{n_a}\right)$, soit ici $d = 0,696 \text{ m}$
- si n_a est impair : $d = \frac{D}{2} - \left(\frac{D}{2} - u\right) \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{n_a}\right)$

Quelle valeur de z retient-on ?

- soit forfaitairement : $z = 0,9d = 0,9 \times 0,696 = 0,626 \text{ m}$,
- soit en partant du produit $b_w \cdot z$ et en écrivant l'égalité $\tau = \frac{V}{b_w \cdot z} \rightarrow z = \frac{V}{b_w \cdot \tau}$ et en retenant les valeurs de $\tau_{Ed,max}$ et la largeur b_w correspondante issues du programme n° 140 : $V = 0,7 \text{ MN}$; $\tau_{Ed,max} = 1,8 \text{ MPa}$ et $b_w = 0,763 \text{ m}$,
d'où $z = \frac{0,7}{0,763 \times 1,8} = 0,510 \text{ m}$, soit $0,73d < 0,9d$
- soit en prenant la distance entre les deux résultantes de compression et traction :
 $z = z_c + z_t = 0,206 + 0,428 = 0,633 \text{ m} = 0,91d$, valeur que nous retenons.

La section droite de la bielle perpendiculairement à l'axe du pieu vaut :

$$S_1 = \pi \frac{D.z}{4} = \pi \frac{0,8 \times 0,633}{4} = 0,398 \text{ m}^2 \text{ (ellipse)}$$

La section droite perpendiculaire à son inclinaison θ : $S_b = S_1 \cdot \cos \theta = 0,398 \times 0,874 = 0,348 \text{ m}^2$

- l'effort de compression dans la bielle vaut $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta} = \frac{0,7}{0,486} = 1,44 \text{ MN}$

$$\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} = \frac{1,44}{0,348} = 4,14 < 0,6 \nu' \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times \frac{f_{ck}}{\gamma_C} = 0,6 \times 0,9 \times 16,67 = 9 \text{ MPa OK (46 \%)}$$

Armatures transversales

De l'équation (6.8) de l'EC2, on tire : $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot \theta \cdot f_{yd}} = \frac{0,7 \times 10^4}{0,633 \times 1,8 \times 435} = 14,13 \text{ cm}^2/\text{m}$ (équation valable quelle que soit la forme de la section).

Cette armature est obtenue avec des cerces HA10 espacées de 111 mm. (= $2 \times 0,785 / 0,111$) = 14,14 cm²/m).

Remarque. En flexion simple, on pourrait aussi prendre 0,9d, soit $z = 0,9 \times 0,696 = 0,626 \text{ m}$

On obtiendrait : $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{0,7 \times 10^4}{0,634 \times 435 \times 1,8} = 14,28 \text{ cm}^2/\text{m}$

ANNEXE I

CAS DE SECTION CIRCULAIRE ENTIÈREMENT COMPRIMÉE OU ENTIÈREMENT TENDUE

1 – Section entièrement comprimée

Compte tenu du fait que le raccourcissement maximal du béton vaut ϵ_{cu2} pour le diagramme parabole-rectangle (P-R) et qu'en compression simple, il est limité à ϵ_{c2} , le diagramme des déformations de la section est compris à l'intérieur de la zone hachurée (Fig. 1 – droite).

Pour un moment donné M_{Ed} et un effort normal N_{Ed} , l'équilibre est obtenu pour des raccourcissements ϵ_h en haut et ϵ_b en bas de la section tels que les sollicitations résistantes N_{Rd} et M_{Rd} soient égales aux sollicitations agissantes N_{Ed} et M_{Ed} .

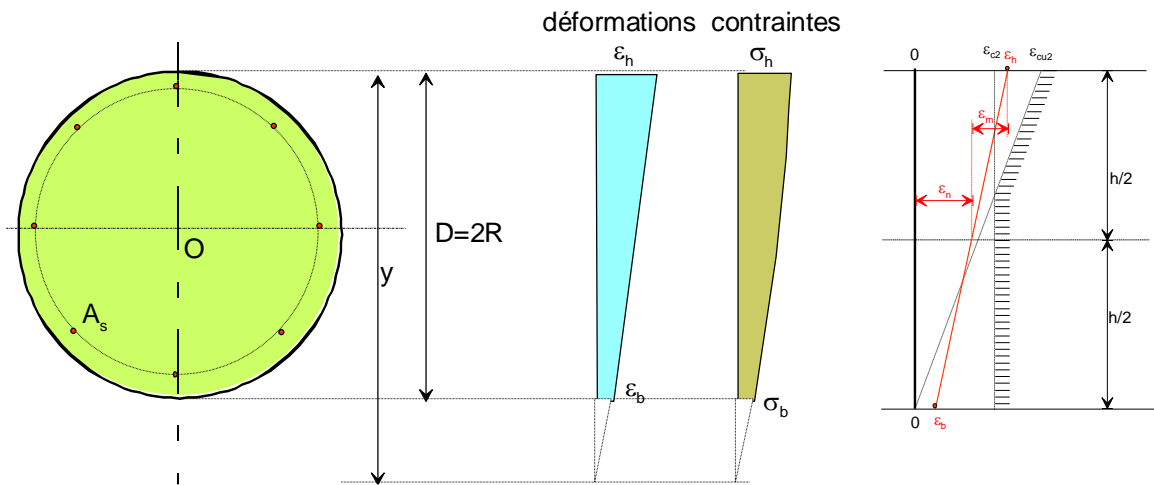


Fig. 1 - Section circulaire entièrement comprimée

Remarque. Du fait de la répartition des armatures sur le périmètre de la section, qu'il n'y a pas de béton tendu et que l'on ne peut plus déterminer de bras de levier comme pour les sections partiellement tendues, la largeur de bielle à prendre en compte est $D = 2R$ dans le sens perpendiculaire à la figure et $\beta = \delta \cdot \cos \theta$ dans la direction perpendiculaire à son inclinaison, si l'on désigne par δ le diamètre intérieur des cerces $\delta = 2d - D$

Sa section droite a une aire qui vaut $S_b = \frac{\pi \cdot \delta \cdot D \cdot \cos \theta}{4}$ (ellipse).

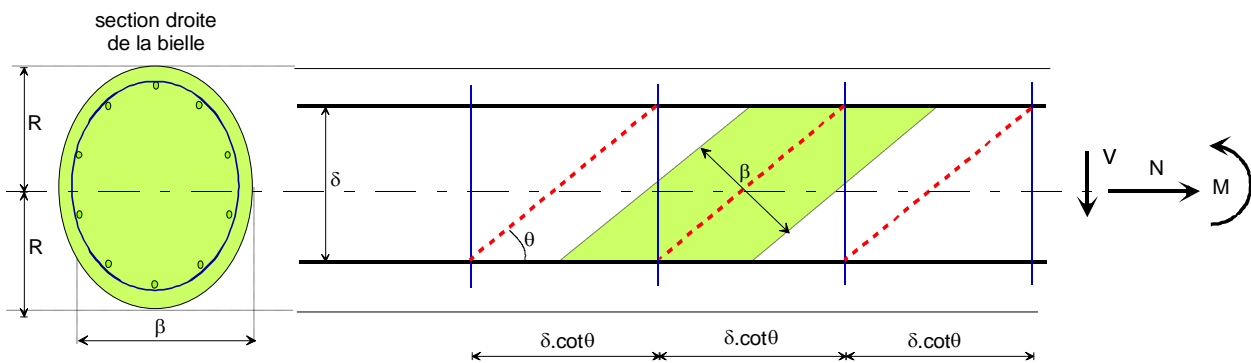


Fig. 2 – Bielles et cerces – La section droite de la bielle est une ellipse

La contrainte de compression du béton de la bielle vaut : $\sigma_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta \cdot S_b} = \frac{4V_{Ed}}{\pi \cdot \delta \cdot D \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}$

Cette bielle étant traversée par des cerces tendus est donc du type 2 selon l'EC2 : Eq. (6.56).

La contrainte limite vaut $\sigma_{Rd,max} = 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6(1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd}$

Application numérique – Section entièrement comprimée

Données

Pieu Ø800

Effort normal de compression : $N_{Ed} = 3 \text{ MN}$

Effort tranchant $V_{Ed} = 0,7 \text{ MN}$

Moment fléchissant $M_{Ed} = 0,2 \text{ MNm}$

Diagramme béton parabole-rectangle

Enrobage à l'axe des armatures longitudinales : 0,08 m pour 6HA25

L'équilibre est obtenu pour des déformations $\varepsilon_h = 0,635 \text{ ‰}$ en haut et $\varepsilon_b = 0,107 \text{ ‰}$ en bas. La section est entièrement comprimée et la fibre neutre est à $0,962 \text{ m} > D = 0,8 \text{ m}$ de la fibre supérieure.

Le cisaillement maximal vaut $\tau_{Ed,max} = 1,84 \text{ MPa}$ à $0,424 \text{ m}$ de la fibre supérieure.

On retrouve bien l'effort tranchant de $0,7 \text{ MN}$ à $0,1 \text{ ‰}$ près en intégrant le produit $b(y) \cdot \tau(y)$ sur la hauteur de la section.

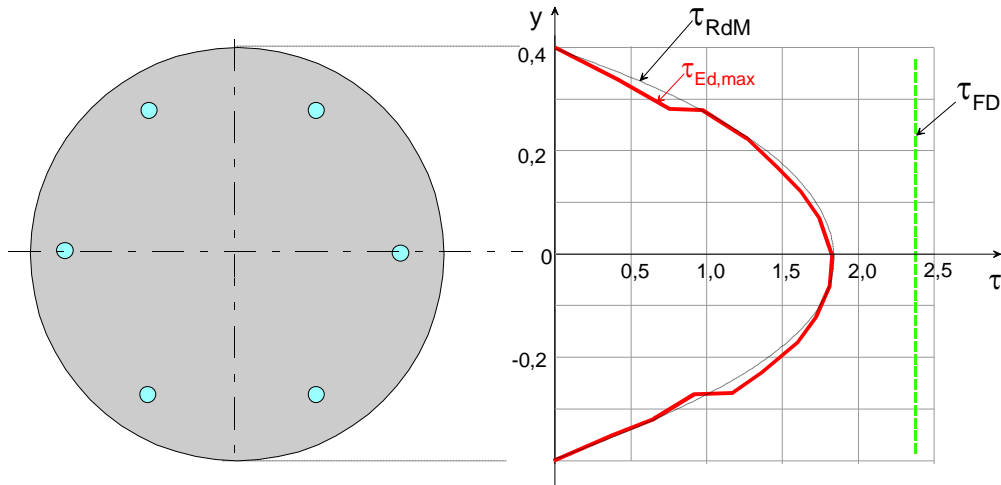


Fig. 3– Cisaillement en section entièrement comprimée

On constate que dans cet exemple, le cisaillement calculé par la formule classique de la Résistance des

matériaux (parabole) $\tau = \frac{4}{3} \frac{V_{Ed}}{\pi R^2} = \frac{16}{3} \frac{V_{Ed}}{\pi D^2}$ donne une courbe très voisine avec pratiquement la même valeur

maximale ; le cisaillement calculé par le FD P18-717 est nettement sécuritaire.

Inclinaison de la bielle

Pour économiser sur le poids des armatures transversales, on a intérêt à minimiser la valeur de $\cot\theta$. Dans le cas de flexion composée de compression, on peut retenir une inclinaison de bielle telle que

$$\sigma_{cp} = \frac{4N_{Ed}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 3}{\pi \times 0,8^2} = 5,97 \text{ MPa (c'est ce que faisait le BPEL)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tau_{Ed}}{\sigma_{cp}} = \frac{2 \times 1,84}{5,97} = 0,616 \text{ d'où } \theta = 0,276 \text{ rd et } \cot\theta = 3,53 > 2,5 \text{ que nous limiterons à } 2,5.$$

Vérification de la bielle

Si l'on applique les formules (6.9) et (6.11) de l'EC2, on trouve :

$$\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} = \frac{\sigma_{cp} \cdot \gamma_C}{f_{ck}} = \frac{5,97 \times 1,5}{25} = 0,352 < 0,5 \rightarrow \alpha_{cw} = 1,25 \text{ d'après (6.11)}$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\tan\theta + \cot\theta) = 1,25 \times 0,6 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \cdot \frac{25}{1,5} \cdot \frac{1}{2,5 + 0,4} = 3,88 \text{ MPa}$$

On a bien $\tau_{Ed,max} = 1,84 < V_{Rd,max} = 3,88 \text{ MPa OK}$

On calcule ainsi :

- la section droite de la bielle perpendiculairement à l'axe du pieu : $S_1 = \pi \frac{D \cdot \delta}{4}$ (ellipse)

Pour $d = 0,677 \text{ m}$: $\delta = 2d - D = 0,554 \text{ m}$

- la section droite perpendiculaire à son inclinaison θ : $S_b = S_1 \cdot \cos \theta$
- l'effort de compression dans la bielle vaut $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta}$
- la contrainte de compression de la bielle : $\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} < 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times \frac{f_{ck}}{\gamma_C}$

Quelle valeur de z retient-on ?

En section entièrement comprimée, on a une courbe de cisaillement assez voisine de celle de la Résistance des matériaux. Dans ce dernier cas, le cisaillement maximal est donné par $\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{Ed}}{\pi R^2} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z}$

$$\text{d'où l'on tire } b_w \cdot z = \frac{3\pi R^2}{4} = \frac{3\pi D^2}{16}$$

Comme le cisaillement maximal a lieu à mi-hauteur : $b_w = D$, d'où l'on tire

$$z = \frac{3\pi D}{16} = 0,59D \approx 0,65d = 0,65 \times 0,8 = 0,520 \text{ m}$$

La section droite de la bielle perpendiculairement à l'axe du poteau ou du pieu vaut :

$$S_1 = \pi \frac{D \cdot \delta}{4} = \pi \frac{0,8 \times 0,554}{4} = 0,348 \text{ m}^2 \text{ (ellipse)}$$

La section droite perpendiculaire à son inclinaison θ : $S_b = S_1 \cdot \cos \theta = 0,348 \times 0,928 = 0,323 \text{ m}^2$

- l'effort de compression dans la bielle vaut $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta} = \frac{0,7}{0,371} = 1,88 \text{ MN}$

$$\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} = \frac{1,88}{0,323} = 5,84 \text{ MPa} < 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times \frac{f_{ck}}{\gamma_C} = 0,6 \times 0,9 \times 16,67 = 9 \text{ MPa OK}$$

Armatures transversales

De l'équation (6.8) de l'EC2, on tire : $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot \theta \cdot f_{yd}}$

La longueur $z \cdot \cot \theta$ représente la longueur sur laquelle les cerces peuvent reprendre l'effort tranchant. Comme les cerces englobent les armatures longitudinales sur tout leur pourtour, on peut prendre

$$z = D - 2u + \varnothing = 0,80 - 2 \times 0,08 + 0,025 = 0,665 \text{ m.}$$

On obtient donc :

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{0,7 \times 10^4}{0,665 \times 435 \times 2,5} = 9,68 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ soit des cerces HA10 espacées de } 160 \text{ mm } (= 9,81 \text{ cm}^2/\text{m}).$$

2 – Section entièrement tendue

Comme dans le cas de section entièrement comprimée, on ne peut pas déterminer de bras de levier. On

retiendra comme contrainte de la bielle $\sigma_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta \cdot S_b} = \frac{4V_{Ed}}{\pi \cdot \delta \cdot D \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}$ $\sigma_b = \frac{V_{Ed}}{\sin \theta \cdot S_b} = \frac{4V_{Ed}}{\pi \cdot \delta \cdot D \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}$ avec la

même contrainte résistante limite $\sigma_{Rd,max} = 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6(1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd}$.

Application numérique – Section entièrement tendue

Données

Pieu $\varnothing 800$

Effort normal de traction : $N_{Ed} = -3 \text{ MN}$

Effort tranchant $V_{Ed} = 0,7 \text{ MN}$

Moment fléchissant $M_{Ed} = 0,2 \text{ MNm}$

Diagramme béton parabole-rectangle

Enrobage à l'axe des armatures longitudinales : 0,08 m pour 8HA40

L'équilibre est obtenu pour des déformations $\varepsilon_h = -0,715\text{‰}$ en haut et $\varepsilon_b = -2,269\text{‰}$ en bas. La section est entièrement tendue et la fibre neutre est à 0,368 m à l'extérieur de la fibre supérieure.

Le cisaillement maximal vaut $\tau_{Ed,max} = 1,873$ MPa à 0,280 m de la fibre supérieure.
 On retrouve bien l'effort tranchant de 0,7 MN à 1,1% près en intégrant le produit $b(y) \cdot \tau(y)$ sur la hauteur de la section.

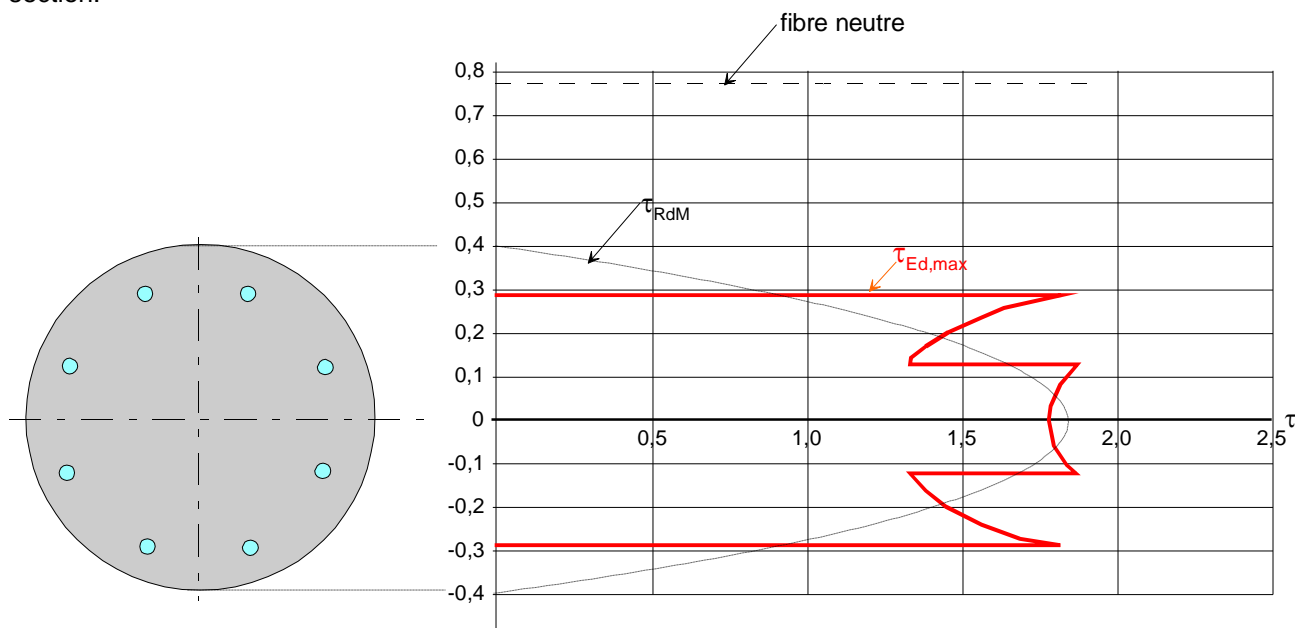


Fig. 4 – Section entièrement tendue

On constate, dans cet exemple, que le cisaillement calculé par la formule classique de la Résistance des matériaux, parabole $\tau = \frac{4}{3} \frac{V_{Ed}}{\pi R^2} = \frac{16}{3} \frac{V_{Ed}}{\pi D^2}$ donne une valeur maximale très voisine avec 1,857 MPa au lieu de 1,873 MPa ; le cisaillement calculé par le FD P18-717 est nettement sécuritaire avec $V_{FD} = 2,329$ MPa.

Inclinaison de la bielle

Si l'on applique l'art. 6.2.3 (3) NOTES 1 et 3 de l'Annexe nationale NF EN 1992-1-1/NA, on trouve que

$$|\sigma| = \frac{3}{0,503} = 5,97 > f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa. On est donc en dehors de la limite, ce qui conduit à appliquer l'article 6.2.3 (3)}$$

du Guide FD P18-717 :

En théorie, l'inclinaison de la bielle devrait conduire à des angles supérieurs à 45° ($\cot\theta < 1$). Pour économiser le poids des armatures transversales, on a intérêt à imposer un angle aussi voisin que possible de 45° en concentrant les armatures tous les $0,75d$ (limite des espacements suivant § 9.2.2 (6) de l'EC2) comme le préconise le FD P18-717, § 6.2.3 (3).

Comme pour le cas de section entièrement comprimée et du fait de la répartition des armatures sur le périmètre de la section, on ne peut plus déterminer de bras de levier comme pour les sections partiellement tendues, la largeur de bielle à prendre en compte est $D = 2R$ dans le sens perpendiculaire à la figure et $\beta = \varepsilon \cdot \cos\theta$ dans la direction perpendiculaire à son inclinaison, si l'on désigne par ε le diamètre intérieur des cerces $z = \varepsilon = D - 2u + \varnothing = 0,80 - 2 \times 0,08 + 0,025 = 0,665$ m.

$$\text{L'angle d'inclinaison des bielles est donné par } \cot\theta = \frac{0,75d}{z} = \frac{0,75 \times (0,8 - 0,08)}{0,665} = 0,812$$

soit $\theta = 50,9^\circ$.

Vérification de la bielle

On ne peut vérifier la bielle par l'équation (6.9) de l'EC2 donnant $V_{Rd,max}$ puisque $\alpha_{cw} = 0$.

Par contre, comme pour le cas de section entièrement comprimée vu ci-dessus, on peut calculer l'effort de compression dans la bielle et vérifier que la contrainte est inférieure à $\sigma_{Rd,max}$ de l'équation (6.56).

$$\text{- aire de la bielle perpendiculairement à l'axe du pieu : } S_1 = \pi \frac{(D - 2u + \varnothing)^2}{4} = \frac{(0,8 - 2 \times 0,08 + 0,025)^2}{4} = 0,347 \text{ m}^2$$

- section droite perpendiculaire à son inclinaison θ : $S_b = S_1 \cdot \cos\theta = 0,347 \times 0,630 = 0,219 \text{ m}^2$

- effort de compression dans la bielle $F_b = \frac{V_{Ed}}{\sin\theta} = \frac{0,7}{0,776} = 0,902 \text{ MN}$

$\sigma_b = \frac{F_b}{S_b} = \frac{0,902}{0,219} = 4,12 \text{ MPa} < 0,6v' \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times \frac{f_{ck}}{\gamma_C} = 0,6 \times 0,9 \times 16,67 = 9 \text{ MPa OK}$

Armatures transversales

De l'équation (6.8), on tire : $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot\theta \cdot f_{yd}}$.

Comme pour le cas de section entièrement comprimée,

$$z = D - 2u + \varnothing = 0,80 - 2 \times 0,08 + 0,025 = 0,665 \text{ m.}$$

On obtient donc : $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{0,7 \times 10^4}{0,665 \times 435 \times 0,812} = 29,80 \text{ cm}^2/\text{m}$ soit des cerces HA14 espacées de 100 mm.